

سلسلة

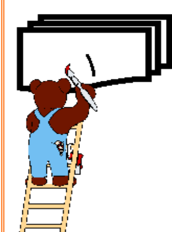
الأوائل

الجبر

للصف الثالث الاعدادى

الفصل الدراسى الأول

إعداد م /وليد رشدى



الدرس الأول

العلاقة والدالة

الزوج المرتب

ملاحظات هامة

❶ (أ ، ب) ≠ (ب ، أ) ❷ (أ ، ب) ≠ {ب ، أ} ❸ (أ ، ب) ≠ [ب ، أ]

❹ (أ ، ب) ∈ ع × ع ❺ (أ ، ب) ∉ ع

تساوى زوجين مرتبين

يقال أن (أ ، ب) = (س ، ص) إذا كان ⇐ أ = س ، ب = ص

✍ مثال [١]

احسب قيمة س , ص إذا كان :

❶ ($س^٢$ ، $ص^٣$) = (٣٦ ، ١٢٥) ❷ ($س^٥$ ، ص + ١) = (٣٢ ، $\sqrt[٣]{٢٧}$)

❶ $س^٢$ = ٣٦ س = ± ٦ , $ص^٣$ = ١٢٥ ، ص = ٥

❷ $س^٥$ = ٣٢ ∴ $س^٥$ = $٢^٥$ ص + ١ = $\sqrt[٣]{٢٧}$ = ٣ ∴ ص = ٣ − ١ = ٢

س = ٢ ص = ٢

✍ مثال [٢]

احسب قيمة س , ص إذا كان :

❶ (٣ س ، ص + س) = (٢٧ ، ٥) ❷ ($\sqrt{س}$ ، $ص^٢$) = (٤ ، ٤)

❶ ٣ س = ٢٧ ⇐ س = ٩ ∵ ص + س = ٥ ∴ ص + ٩ = ٥

∴ ص = ٥ − ٩ ∴ ص = − ٤

❷ ∵ $\sqrt{س}$ = ٤ ∴ س = ١٦ ∵ $ص^٢$ = ٤ ∴ ص = ± ٢

✍ مثال [٣]

إذا كان {(٦ ، ٢ أ) ، (٢ ب ، ٥ جـ)} = {(٤ ، ٢٠) ، (٦ ، جـ)} فما قيمة أ ، ب ، جـ ؟

مقارنة الأزواج المرتبة نستنتج أن

٢ ب = ٤ ⇐ ب = ٢ ، ٥ جـ = ٢٠ ⇐ جـ = ٤

٢ أ = جـ ٢ أ = ٤ أ = ٢

حاصل الضرب الديكارتى

الحاصل الديكارتى للمجموعة س ، ص هو مجموعة من الأزواج المرتبة التى مسقطها الأول عنصر من عناصر س ومسقطها الثانى من عناصر ص ويرمز له بالرمز س × ص أى أن :

س × ص = { (س ، ص) : س ∈ س ، ص ∈ ص }

ملاحظات

❶ س × ص ≠ ص × س

❷ عدد عناصر (س × ص) = عدد عناصر س × عدد عناصر ص

❸ ن (س × ص) = ن (س) × ن (ص) = ن (ص) × ن (س) حيث ن ترمز لعدد العناصر

❹ ن ($س^٢$) = ن (س × س) = ن (س) × ن (س)

❺ ن (∅) = صفر

❻ س × ∅ = ∅ × س = ∅

❼ ∅ × ∅ = ∅

مثال [٤]

إذا كان : س = { ١ ، ٢ ، ٣ } ، ص = { ٠ ، ١ } أثبت أن س × ص ≠ ص × س

❶ س × ص = { (١ ، ٠) ، (١ ، ١) ، (٢ ، ٠) ، (٢ ، ١) ، (٣ ، ٠) ، (٣ ، ١) }

❷ ص × س = { (٠ ، ١) ، (٠ ، ٢) ، (٠ ، ٣) ، (١ ، ١) ، (١ ، ٢) ، (١ ، ٣) }

∴ س × ص ≠ ص × س

مثال [٥]

إذا كانت : س = { ٢ ، ٣ } ، ص = { ٣ ، ٤ ، ٥ } اوجد :

❶ س × ص
❷ $س^٢$
❸ $ص^٢$
❹ ن ($س^٢$)
❺ ن ($ص^٢$)
❻ ن (س × ص)

❶ س × ص = { (٢ ، ٣) ، (٢ ، ٤) ، (٢ ، ٥) ، (٣ ، ٣) ، (٣ ، ٤) ، (٣ ، ٥) }

❷ $س^٢$ = { (٢ ، ٢) ، (٢ ، ٣) ، (٣ ، ٢) ، (٣ ، ٣) }

❸ $ص^٢$ = { (٣ ، ٣) ، (٣ ، ٤) ، (٣ ، ٥) ، (٤ ، ٣) ، (٤ ، ٤) ، (٤ ، ٥) ، (٥ ، ٣) ، (٥ ، ٤) ، (٥ ، ٥) }

❹ ن ($س^٢$) = ٤
❺ ن ($ص^٢$) = ٩
❻ ن (س × ص) = ٦

مثال [٦]

إذا علمت أن س = {٤ ، ٣} ، ص = {٤ ، ٥} ، ع = {٦ ، ٥} ، **أوجد :**

❶ (س ∩ ص) × ع ❷ (س − ص) × ع ❸ س × (ص − ع)

❹ (س ∩ ع) × ص ❺ (ص ∩ ع) × س ❻ (س ∪ ص) × (ص − ع)

❶ (س ∩ ص) × ع = {٤} × {٦ ، ٥} = {(٤ ، ٦) ، (٤ ، ٥)}

❷ (س − ص) × ع = {٣} × {٦ ، ٥} = {(٣ ، ٦) ، (٣ ، ٥)}

❸ س × (ص − ع) = {٤ ، ٣} × {٤} = {(٤ ، ٤) ، (٣ ، ٤)}

❹ (س ∩ ع) × ص = ∅ × {٤ ، ٥} = ∅

❺ (ص ∩ ع) × س = {٥} × {٤ ، ٣} = {(٥ ، ٤) ، (٥ ، ٣)}

❻ (س ∪ ص) × (ص − ع) = {٣ ، ٤ ، ٥} × {٤} = {(٣ ، ٤) ، (٤ ، ٤) ، (٥ ، ٤)}

مثال [٧]

إذا علمت أن س = {٣ ، ٥} ، ص = {٣ ، ٧ ، ٨} ، ع = {٣ ، ٤ ، ٥} ،

أوجد : ❶ (س × ص) ∩ (س × ع) ❷ س × (ص ∩ ع) **وماذا تلاحظ**

❶ (س × ص) = {(٣ ، ٣) ، (٣ ، ٧) ، (٣ ، ٨) ، (٥ ، ٣) ، (٥ ، ٧) ، (٥ ، ٨)}

❷ (س × ع) = {(٣ ، ٣) ، (٣ ، ٤) ، (٣ ، ٥) ، (٥ ، ٣) ، (٥ ، ٤) ، (٥ ، ٥)}

∴ (س × ص) ∩ (س × ع) = {(٣ ، ٣) ، (٥ ، ٣)}

∴ س × (ص ∩ ع) = {٣ ، ٥} × {٣} = {(٣ ، ٣) ، (٥ ، ٣)}

الملاحظة (س × ص) ∩ (س × ع) = س × (ص ∩ ع)

مثال [٨]

إذا علمت أن س × ص = {(٢ ، ٦) ، (٢ ، ٩) ، (٣ ، ٦) ، (٣ ، ٩) ، (٥ ، ٦) ، (٥ ، ٦)}

فأوجد ❶ س ❷ ص ❸ س٢ ❹ ص٢

❶ س = {٢ ، ٣ ، ٥} ❷ ص = {٦ ، ٩}

❸ س٢ = {(٢ ، ٢) ، (٢ ، ٣) ، (٢ ، ٥) ، (٣ ، ٢) ، (٣ ، ٣) ، (٣ ، ٥) ، (٥ ، ٢) ، (٥ ، ٣) ، (٥ ، ٥)}

❹ ص٢ = {(٦ ، ٦) ، (٦ ، ٩) ، (٩ ، ٦) ، (٩ ، ٩)}

تمارين (١) على حاصل الضرب الديكارتى

(١) أكمل العبارات الآتية

١ إذا كان س = { ٣ } فإن س^٢ = ...

٢ إذا كانت س^٢ = { (٢ ، ٢) } فإن : س = ...

٣ { ٣ } × .... = { (٣ ، ٧) }

٤ إذا كان ن (س) = ٢ فإن ن (س^٢) = ...

٥ إذا كان ن (س^٢) = ١٦ فإن ن (س) = ...

٦ { ١ } × { ٣ } = ...

٧ إذا كان : ن (س) = ٣ فإن : ن (س^٢) = ...

٨ إذا كان : (٢ ، ٧) ∈ { ٢ ، ٥ } × { ٤ ، ك } فإن ك = ...

٩ إذا كان (س ، ١) = (٣ ، ص) فإن س = ... ، ص = ...

١٠ إذا كان (س − ١ ، ٢ص) = (٠ ، ٨) فإن س = ... ، ص = ...

١١ إذا كان س × ص = { (أ ، ١) ، (أ ، ٢) ، (أ ، ٥) ، (ب ، ١) ، (ب ، ٢) ، (ب ، ٥) }

فإن س = ... ، ص =......

١٢ إذا كان : ن (س) = ٢ ، ن (ص) = ٤ فإن ن (س × ص) = ...

١٣ إذا كان : ن (س × ص) = ١٢ ، ن (س) = ٣ فإن ن (ص) = ...

١٤ إذا كان : ن (س) = ٤ ، ن (ص) = ٣ فإن : ن (س × ص) = ...

١٥ إذا كان : ن (س × ص) = ١٨ ، ن (س) = ٦ فإن : ن (ص) = ...

١٦ إذا كان س × س = { (٢ ، ٣) } فإن س^٢ = ... ، ص^٢ = ...

١٧ إذا كان : س × ص = { (١ ، ٥) ، (٣ ، ٤) ، (١ ، ٤) ، (٣ ، ٥) } فإن : س = ... ، ص = ...

١٨ إذا كان : (١ ، ٣) ∈ { ١ ، ٧ } × { س ، ٩ } فإن : س = ...

(٢) فى كل مما يأتى أوجد قيم أ ، ب إذا كان

١ (أ ، ب) = (٣ ، ٢)

٢ (أ ، ب) = ($\sqrt{٢٥}$ ، $\sqrt[٣]{٢٧}$)

٣ (أ − ٢ ، ب + ١) = (٢ ، −٣)

٤ (٦ ، ب − ٣) = (٢ − أ ، −١)

٥ (أ^٢ ، ١٢٥) = (٣٦ ، ب^٣)

٦ (أ − ٧ ، ٢٦) = (−٢ ، ب^٣ − ١)

٧ (٥^{٢أ} ، $\sqrt{٨١}$) = (٦٢٥ ، ٣^ب)

٨ ($\sqrt{٢٥}$ ، أ) = (ب ، ٢^٠)

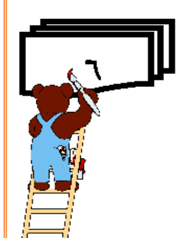
٩ (٢أ ، ٧) = (٢ب + ١ ، أ)

١٠ (٣ ، ب) = (٥أ − ١ ، ٤أ)

(٣) إذا كانت : س = { ٥ } ، ص = { ٢ ، ٧ }

أوجد ١ س × ص ٢ ص × س ٣ س^٢ ٤ ص^٢

(٤) إذا كانت : س = { ١ ، ٢ ، ٣ } أوجد : ١ س × س ٢ س^٢ وماذا تلاحظ



(٥) إذا كانت : س = { −١ ، ٢ } ، ص = { ٠ ، ٤ } ، ع = { ٤ ، ٥ ، −٢ } أوجد

❶ س × ع　❷ س × ص　❸ س^٢

❹ ن(ص^٢)　❺ ن(ع^٢)　❻ ن(س × ع)

(٦) إذا كانت : س = { ٢ ، ٣ } ، ص = { ٣ ، ٤ ، ٥ } أوجد

❶ س × ص　❷ ن(س × ص)　❸ س^٢

❹ ص^٢　❺ ن(ص^٢)　❻ (س × ص) ∩ ص^٢

(٧) إذا كانت : س = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ } ، ص = { ٣ ، ٤ ، ٥ } أوجد

❶ (س ∩ ص) × ص　❷ (س − ص) × ص　❸ (ص − س) × س

(٨) إذا كانت : س = { ٣ ، ٤ } ، ص = { ٤ ، ٥ } ، ع = { ٥ ، ٦ }

أوجد ❶ (س − ص) × ع　❷ س × (ص ∩ ع)　❸ (س − ص) × (ص − ع)

(٩) إذا كانت : س = { أ ، ب ، جـ } ، ص = { ب ، د ، هـ } ، ع = { أ ، ب ، و }

أوجد ❶ (ص − ع) × س　❷ (س ∩ ع) × ص　❸ (س − ص) × (ص − س)

(١٠) إذا كانت : س = { ١ ، ٢ } ، ص = { ٢ ، ٣ } أثبت أن :

❶ س × (س ∩ ص) = (س × س) ∩ (س × ص)

❷ ص × (س ∪ ص) = (ص × س) ∪ (ص × ص)

(١١) إذا كانت : س × ص = { (١ ، ١) ، (١ ، ٣) ، (١ ، ٥) }

أوجد ❶ س ، ص　❷ ص × س　❸ ص^٢

(١٢) إذا كان : ص^٢ = { (٥ ، ٥) ، (٥ ، ٦) ، (٦ ، ٥) ، (٦ ، ٦) }

، س × س = { (١ ، ١) ، (٣ ، ١) ، (٤ ، ١) ، (١ ، ٤) ، (٣ ، ٤) ، (٤ ، ٤) ، (١ ، ٣) ، (٣ ، ٣) ، (٤ ، ٣) }

أوجد : س ، ص ، س × ص ، ص × س

(١٣) إذا كانت : س ⊂ ص

، س × ص = { (أ ، ١) ، (أ ، ٢) ، (أ ، ٣) ، (٢ ، ١) ، (٢ ، ٢) ، (٢ ، ٣) } أوجد قيمة أ

على حاصل الضرب الديكارتي الغير منتهي و التمثيل البياني له

إذا كانت النقطة (أ ، ب) ∈ محور س فإن ب = ٠

إذا كانت النقطة (أ ، ب) ∈ محور ص فإن أ = ٠

إذا كانت النقطة (أ ، ب) ∈ الربع الأول فإن أ > ٠ ، ب > ٠ أى أن أ ب > ٠ أى كمية موجبة

إذا كانت النقطة (أ ، ب) ∈ الربع الثانى فإن أ < ٠ ، ب > ٠ أى أن أ ب < ٠ أى كمية سالبة

إذا كانت النقطة (أ ، ب) ∈ الربع الثالث فإن أ < ٠ ، ب < ٠ أى أن أ ب > ٠ أى كمية موجبة

إذا كانت النقطة (أ ، ب) ∈ الربع الرابع فإن أ > ٠ ، ب < ٠ أى أن أ ب < ٠ أى كمية سالبة

مثال [١]

① إذا كانت النقطة (س − ٣ ، ٤ − س) ∈ محور س فإن س = ...

② إذا كانت النقطة (٦ − أ ، ٢ − أ) ∈ محور ص فإن أ = ...

③ إذا كانت النقطة (ب − ٧ ، ب + ٩) ∈ محور س فإن ب = ...

④ إذا كانت النقطة (٢ص ، ١ − ص) ∈ محور ص فإن ص = ...

① إذا كانت النقطة (س − ٣ ، ٤ − س) ∈ محور س فإن س = ...

∵ (س − ٣ ، ٤ − س) ∈ محور س ∴ المسقط الثانى = صفر

∴ ٤ − س = ٠ ∴ س = ٤

② إذا كانت النقطة (٦ − أ ، ٢ − أ) ∈ محور ص فإن أ = ...

∵ (٦ − أ ، ٢ − أ) ∈ محور ص ∴ المسقط الأول = ٠

∴ ٦ − أ = ٠ ∴ أ = ٦

③ إذا كانت النقطة (ب − ٧ ، ب + ٩) ∈ محور س فإن ب = ...

∵ (ب − ٧ ، ب + ٩) ∈ محور س ∴ المسقط الثانى = صفر

∴ ب + ٩ = ٠ ∴ ب = −٩

④ إذا كانت النقطة (٢ص ، ١ − ص) ∈ محور ص فإن ص = ...

∵ (٢ص ، ١ − ص) ∈ محور ص ∴ المسقط الأول = ٠

∴ ٢ص = ٠ ∴ ص = ٠

مثال [٢]

❶ إذا كانت النقطة (س − ١ ، ٥ − س) ∈ الربع الأول ∋ س ∈ ....

❷ إذا كانت النقطة (٤ − أ ، أ − ٦) ∈ الثالث ∋ أ ∈ ....

❸ إذا كانت النقطة (ب − ٧ ، ب + ٩) ∈ الثانى ∋ ب ∈ ....

❹ إذا كانت النقطة (٢ص ، ١ − ص) ∈ الرابع ∋ ص ∈ ....

❶ ∵ النقطة (س − ١ ، ٥ − س) ∈ الربع الأول ∵ (+ ، +) ∈ الربع الأول

∴ س − ١ > ٠ ∴ س > ١ ، ٥ − س > ٠ ∴ س < ٥

∴ ١ < س < ٥ ∴ س ∈]١ ، ٥[

❷ ∵ النقطة (٤ − أ ، أ − ٦) ∈ الثالث ∵ (− ، −) ∈ الربع الثالث

∴ ٤ − أ < ٠ ∴ أ > ٤ ، أ − ٦ < ٠ ∴ أ < ٦

∴ ٤ < أ < ٦ ∴ أ ∈]٤ ، ٦[

❸ ∵ النقطة (ب + ٧ ، ب + ٩) ∈ الثانى ∵ (− ، +) ∈ الربع الثانى

∴ ب + ٧ < ٠ ∴ ب < −٧ ، ب + ٩ > ٠ ∴ ب > −٩

∴ −٩ < ب < −٧ ∴ ب ∈]−٩ ، −٧[

❹ ∵ النقطة (٢ص ، ٤ + ص) ∈ الرابع ∵ (+ ، −) ∈ الربع الثانى

∴ ٢ص > ٠ ∴ ص > ٠ ٤ + ص < ٠ ص < −٤

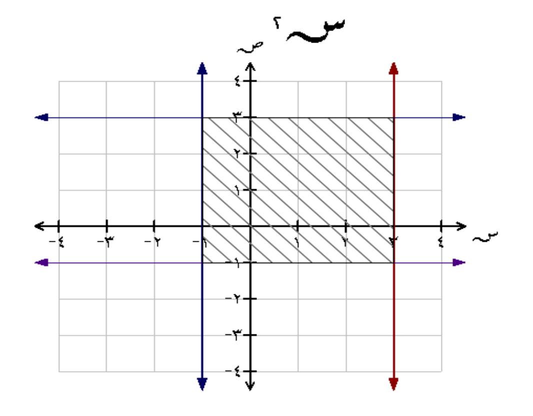
∴ −٤ < ص < ٠ ص ∈]−٤ ، ٠[

مثال [٣]

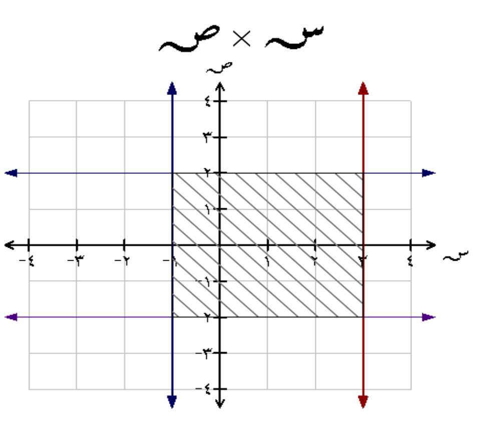
إذا كانت : س = [−١ ، ٣] ، ص = [−٢ ، ٢] أوجد المنطقة التى تمثل س^٢ ، س × ص ثم بين أى من النقاط التالية تنتمى إلى حاصل الضرب الديكارتى س^٢ أ(٠ ، ٠) ، ب(٢ ، −٢) ، جـ(−١ ، ١) ، ء(−١ ، ٠)

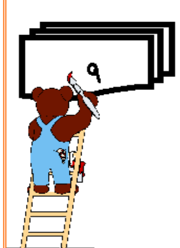
أ(٠ ، ٠) ∈ س^٢ ، ب(٢ ، −٢) ∉ س^٢ ، جـ(−١ ، ١) ∈ س^٢ ، ء(−١ ، ٠) ∈ س^٢

س^٢



س × ص





تمارين [٢] على حاصل الضرب الديكارتى الغير منتهى و التمثيل البيانى له

[١] أكمل العبارات الاتية :-

❶ النقطة (٣ ، ٠) تنتمى لمحور ....

❷ النقطة (٠ ، ٤) تنتمى لمحور ....

❸ النقطة (–٥ ، ٠) تنتمى لمحور ....

❹ النقطة (٠ ، –٣) تنتمى لمحور ....

❺ إذا كانت النقطة (م – ٢ ، ٥) تنتمى لمحور الصادات فإن م = ...

❻ إذا كانت النقطة (م + ٣ ، ٦) تنتمى لمحور الصادات فإن م = ...

❼ إذا كانت النقطة (١ – م ، م – ٥) تنتمى لمحور السينات فإن م = ...

❽ إذا كانت النقطة (٣ ، م + ٢) تنتمى لمحور السينات فإن م = ...

❾ إذا كانت النقطة (م – ٢ ، م + ٤) تقع فى الربع الرابع فإن م ∋ ....

❿ إذا كانت النقطة (م – ١ ، ٧ – م) تقع فى الربع الثانى فإن م ∋ ....

⓫ إذا كانت النقطة (٢ – م ، ١ + م) تقع فى الربع الأول فإن م ∋ ....

⓬ إذا كانت النقطة (٢ – م ، ٣ – م) تقع فى الربع الثانى فإن م ∋ ....

⓭ إذا كانت النقطة (ص – ٦ ، ص – ٢) تقع على محور السينات فإن : ص = ...

[٢] اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

❶ النقطة .... تقع فى الربع الثانى .

(١) (٣ ، ٢)　　(٢) (–٢ ، ٣)　　(٣) (–٣ ، –٢)　　(٤) (٢ ، –٣)

❷ إذا كانت النقطة (م ، ٣) تقع على محور الصادات فان : م = ...

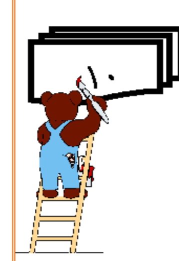
(١) صفر　　(٢) ١　　(٣) ٢　　(٤) ٨

❸ إذا كانت النقطة (٥ ، ب – ٧) تقع على محور السينات فان : ب = ...

(١) ٢　　(٢) ٥　　(٣) ٧　　(٤) ١٢

❹ إذا كانت (م ، ب) تقع فى الربع الرابع فان م ب .... صفر

(١) <　　(٢) >　　(٣) =　　(٤) ≤



❺ إذا كانت النقطة (٢ أ ، ٣ ب) ∈ $\overleftrightarrow{\text{س س}'}$ فان : $\frac{\text{ب}}{\text{أ}}$ = ...

(١) صفر (٢) ٢ (٣) ٣ (٤) $\frac{٢}{٣}$

❻ إذا كانت النقطة (س − ٢ ، س − ٤) تقع فى الربع الرابع فان : س = ... حيث س ∈ ص

(١) صفر (٢) ٢ (٣) ٣ (٤) ٤

❼ إذا كانت النقطة (س − ٤ ، ٢ − س) تقع فى الربع الثالث فان : س = ... حيث س ∈ ص

(١) ٢ (٢) ٦ (٣) ٣ (٤) ٤

[٣] على شبكة بيانية متعامدة للحاصل الديكارتى ع × ع عين النقط الآتية :

أ(٤ ، ٥) ، ب(٦ ، −٣) ، جـ(−٢ ، ٧) ، د(−١ ، ٦) ، هـ(−٤ ، −٥) ، م(٠ ، ٦) ، ك(٩ ، ٠)

ثم اذكر الربع الذى تقع فيه أو المحور الذى تنتمى إليه كل من هذه النقط .

[٤] إذا كانت : س = [−٢ ، ٣] أوجد المنطقة التى تمثل س × س ثم بين أى من النقاط التالية تنتمى إلى حاصل الضرب الديكارتى س × س

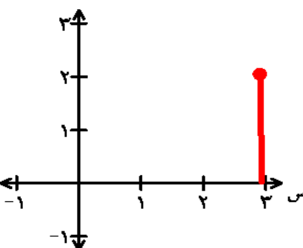
أ(١ ، ٢) ، ب(٣ ، −١) ، جـ(−١ ، ٤) ، د(−٢ ، ٠)

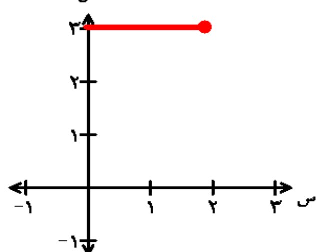
[٥] إذا كانت : س = [−٢ ، ٣] ، ص = [−٣ ، ١] أوجد المنطقة التى تمثل س × س ، ص × س ، س × ص ، ص٢ ثم بين أى من النقاط التالية تنتمى إلى حاصل الضرب الديكارتى س × ص أ(٥ ، ٤) ، ب(٣ ، −٢) ، جـ(−١ ، ٠) ، د(−٢ ، ٢)

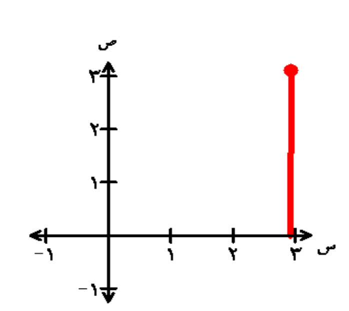
متفوقين

[٦] اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

{ ٣ } × [٠ ، ٢] يمثلها بيانيا الشكل ....







11

العلاقة

إذا كانت س ، ص مجموعتين غير خاليتين فإن العلاقة من س إلى ص هى ارتباط يربط بعض أو كل عناصر س ببعض أو كل عناصر ص

أى أن مجموعة من الأزواج المرتبة المسقط الأول منها ∈ س والمسقط الثانى ∈ ص

ملاحظات

❶ أى مجموعة من الحاصل الديكارتى س × ص هو علاقة وإذا كانت ع علاقة من س إلى ص فإن ع ⊂ س × ص

❷ إذا كانت (أ ، ب) ∈ ع فإن أ ع ب (أى أ يرتبط بالعلاقة مع ب)

الدالة

يقال للعلاقة ع من س إلى ص أنها دالة إذا تحقق إحدى الحالات التالية

❶ كل عنصر من عناصر س يظهر كمسقط أول مرة واحدة فى إحدى الأزواج المرتبة فى ع

❷ كل عنصر من عناصر س يخرج منه سهم واحد فقط إلى عناصر ص فى المخطط السهمى لـ ع

❸ كل خط رأسى تقع عليه نقطة واحدة فقط من نقط ع فى المخطط البيانى

مثال [1]

إذا كانت س = { ١ ، ٢ ، ٥ ، ٨ } ، ص = { أ ، ب ، جـ ، د } وكانت ع علاقة من س إلى ص

بين أى العلاقات التالية تمثل دالة

❶ $ع_1$ = {(١ ، أ) ، (٢ ، جـ) ، (٥ ، ب) ، (٥ ، د) ، (٨ ، أ)}

❷ $ع_2$ = {(١ ، ب) ، (٥ ، د) ، (٨ ، جـ)}   ❸ $ع_3$ = {(١ ، ب) ، (٢ ، جـ) ، (٥ ، جـ) ، (٨ ، ب)}

الحل

❶ $ع_1$ = {(١ ، أ) ، (٢ ، جـ) ، (٥ ، ب) ، (٥ ، د) ، (٨ ، أ)}

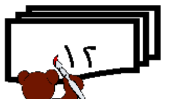
⇐ $ع_1$ ليست دالة لأن العنصر ٥ ∈ س ظهر كمسقط أول مرتين

❷ $ع_2$ = {(١ ، ب) ، (٥ ، د) ، (٨ ، جـ)}

⇐ $ع_2$ ليست دالة لأن العنصر ٢ ∈ س لم يظهر كمسقط أول مرة واحدة

❸ $ع_3$ = {(١ ، ب) ، (٢ ، جـ) ، (٥ ، جـ) ، (٨ ، ب)}

⇐ $ع_3$ دالة لأن كل عنصر من عناصر س ظهر كمسقط أول مرة واحدة





مثال [٢]

إذا كانت ع علاقة على مجموعة الأعداد الطبيعية ط حيث (س ، ص) ∈ ع تعنى أ + ب = ٥ اكتب بيان ع

بيان ع = { (٠ ، ٥) ، (١ ، ٤) ، (٢ ، ٣) ، (٣ ، ٢) ، (٤ ، ١) ، (٥ ، ٠) }

ع ليست دالة لأن كل عنصر من عناصر س لم يظهر كمسقط أول مرة واحدة

مثال [٣]

إذا كان س = { ٠ ، ١ ، ٤ ، ٧ } ، ص = { ١ ، ٣ ، ٥ ، ٦ } وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعنى أ + ب > ٨ لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص اكتب بيان ع وبين ما إذا كانت دالة أم لا وإذا كانت دالة اذكر مداها

بيان ع = { (٤ ، ٥) ، (٤ ، ٦) ، (٧ ، ٣) ، (٧ ، ٥) ، (٧ ، ٦) }

ع ليست دالة لأن العنصر ٤ ظهر كمسقط مرتين ، العدد ٧ ظهر كمسقط أول ثلاث مرات

مثال [٤]

إذا كانت س = { ٢ ، ٣ ، ٤ } ، ص = { ص : ص ∈ ط ، ٢ ≤ ص < ٩ } وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعنى أ = $\frac{1}{2}$ ب لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص اكتب بيان ع ثم اذكر ما إذا كانت العلاقة دالة أم لا وإذا كانت دالة أذكر مداها

∵ ص = { ص : ص ∈ ط ، ٢ ≤ ص < ٩ } = { ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ }

∴ بيان ع = { (٢ ، ٤) ، (٣ ، ٦) ، (٤ ، ٨) } ∴ ع دالة

لأن كل عنصر من عناصر س ظهر كمسقط أول مرة واحدة ∴ مدى الدالة = { ٤ ، ٦ ، ٨ }

مثال [٥]

إذا كانت س = { -٢ ، -١ ، ١ ، ٢ } ، ص = { $\frac{1}{8}$ ، $\frac{1}{3}$ ، ١ ، ٣ ، ٨ } وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعنى " أ^٣ = ب " لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص اكتب بيان ع ثم اذكر ما إذا كانت العلاقة دالة أم لا وإذا كانت دالة أذكر مداها

بيان ع = { (١ ، ١) ، (٢ ، ٨) }

ع ليست دالة لأن كل عنصر من عناصر س لم يظهر كمسقط أول مرة واحدة

ع ليست دالة لأن العنصرين -٢ ، -١ لم يظهر كمسقط أول مرة واحدة



مثال [٦]

إذا كانت س = {−٢ ، −١ ، ٠ ، ١ ، ٢}، ص = { $\frac{1}{8}$ ، $\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{2}$ ، ١ ، $\frac{3}{2}$ ، ٢ ، ٤ } وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعنى ب = ٢^أ لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص اكتب بيان ع ثم اذكر ما إذا كانت العلاقة دالة أم لا وإذا كانت دالة أذكر مداها

بيان ع = { (−٢ ، $\frac{1}{4}$) ، (−١ ، $\frac{1}{2}$) ، (٠ ، ١) ، (١ ، ٢) ، (٢ ، ٤) }

ع دالة لأن كل عنصر من عناصر س يظهر كمسقط أول مرة واحدة   المدى = { $\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{2}$ ، ١ ، ٢ ، ٤ }

مثال [٧]

إذا كانت س = {٢ ، ٣ ، ٥ ، ١١}، ص = {٨ ، ٩ ، ٤٠ ، ٤٤} وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب كون العلاقة هي " أ قاسم من قواسم ب " اكتب بيان ع ثم اذكر ما إذا كانت العلاقة دالة أم لا وإذا كانت دالة أذكر مداها

بيان العلاقة = { (٢ ، ٨) ، (٢ ، ٤٠) ، (٢ ، ٤٤) ، (٣ ، ٩) ، (٥ ، ٤٠) ، (١١ ، ٤٤) }

واضح أنها ليست دالة لأن العنصر ٢ ظهر كمسقط أول أكثر من مره

مثال [٨]

إذا كانت س = {٢ ، ٥ ، ٧} ، ص = {١ ، ٢ ، ١٠} وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعنى " أ عامل من عوامل ب " لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص اكتب بيان ع

بيان ع = { (٢ ، ٢) ، (٢ ، ١٠) ، (٥ ، ١٠) }

ع ليست دالة لأن العنصر ٧ لم يظهر كمسقط أول مره واحدة

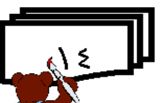
مثال [٩]

إذا كانت س = { ١ ، ٢ ، ٣ } ، ص = { ١ ، $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{5}$ } وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعنى " أ معكوس ضربي ب " لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص اكتب بيان ع ثم اذكر ما إذا كانت العلاقة دالة أم لا وإذا كانت دالة أذكر مداها

بيان ع = { (١ ، ١) ، (٢ ، $\frac{1}{2}$) ، (٣ ، $\frac{1}{3}$) }

ع دالة لأن كل عنصر من عناصر س يظهر كمسقط أول مرة واحدة

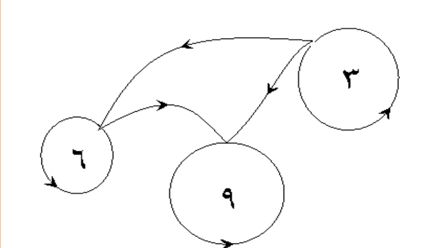
المدى = { ١ ، $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{3}$ }



مثال [١٠]

إذا كانت س = { -٢ ، -١ ، ٠ ، ١ ، ٢ } وكانت ع علاقة من س إلى س حيث أ ع ب تعنى " العدد أ معكوس جمعى للعدد ب " لكل أ ، ب ∈ س اكتب بيان ع ثم اذكر ما إذا كانت العلاقة دالة أم لا وإذا كانت دالة أذكر مداها

بيان ع = { (-٢ ، ٢) ، (-١ ، ١) ، (٠ ، ٠) ، (١ ، -١) ، (٢ ، -٢) }



ع دالة لأن كل عنصر من عناصر س يظهر كمسقط أول مرة واحدة

المدى = { -٢ ، -١ ، ٠ ، ١ ، ٢ }

مثال [١١]

إذا كانت س = { ٣ ، ٦ ، ٩ } وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعنى " أ ≤ ب " لكل أ ، ب ∈ س اكتب بيان ع ثم اذكر ما إذا كانت العلاقة دالة أم لا وإذا كانت دالة أذكر مداه

بيان ع = { (٣ ، ٣) ، (٦ ، ٦) ، (٩ ، ٩) ، (٣ ، ٦) ، (٣ ، ٩) ، (٦ ، ٩) }

ع ليست دالة لأن كل عنصر من عناصر س لم يظهر كمسقط أول مرة واحدة

مثال [١٢]

إذا كانت س = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٦ ، ١١ } وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعنى " أ + ٢ ب = عدد فردى لكل أ ، ب ∈ س اكتب بيان ع ثم اذكر ما إذا كانت العلاقة دالة أم لا وإذا كانت دالة أذكر مداها

بيان ع = { (١ ، ١) ، (١ ، ٢) ، (١ ، ٣) ، (١ ، ٦) ، (١ ، ١١) ، (٣ ، ١) ، (٣ ، ٢) ، (٣ ، ٣) ،
(٣ ، ٦) ، (٣ ، ١١) ، (١١ ، ١) ، (١١ ، ٢) ، (١١ ، ٣) ، (١١ ، ٦) ، (١١ ، ١١) }

ع ليست دالة لأن كل عنصر من عناصر س لم يظهر كمسقط أول مرة واحدة

مثال [١٣]

إذا كانت س = { ١ ، ٢ ، ٤ ، ٦ ، ١٠ } وكانت ع علاقة على س حيث أ ع ب تعنى (أ مضاعف ب) لكل أ ، ب ∈ س اكتب بيان ع ثم اذكر ما إذا كانت العلاقة دالة أم لا وإذا كانت دالة أذكر مداها

بيان ع = { (١ ، ١) ، (٢ ، ١) ، (٤ ، ١) ، (٦ ، ١) ، (١٠ ، ١) ، (٢ ، ٢) ، (٤ ، ٢) ، (٦ ، ٢) ، (١٠ ، ٢) ، (٤ ، ٤) ، (٦ ، ٦) ، (١٠ ، ١٠) }

ع ليست دالة لأن كل عنصر من عناصر س لم يظهر كمسقط أول مرة واحدة



مثال [١٤]

إذا كانت س~ = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٥} ، ص~ = {٥ ، ٧ ، ٩ ، ١٠ ، ١٣} وكانت ع علاقة من س~ إلى ص~ حيث أ ع ب تعنى " ب = ٢أ + ٣ " لكل أ ∈ س~ ، ب ∈ ص~ اكتب بيان ع ثم اذكر ما إذا كانت العلاقة دالة أم لا وإذا كانت دالة أذكر مداها

بيان ع = {(١ ، ٥) ، (٢ ، ٧) ، (٣ ، ٩) ، (٥ ، ١٣)}

العلاقة دالة لأن كل عنصر من عناصر س~ ظهر كمسقط أول مرة واحدة

المدى = {٥ ، ٧ ، ٩ ، ١٣}

مثال [١٥]

إذا كانت س~ = {١ ، ٣ ، ٥ ، ٧} وكانت ع علاقة من س~ إلى س~ حيث أ ع ب تعنى " ب = أ + ٢ " لكل أ ∈ س~ ، ب ∈ ص~ اكتب بيان ع ثم اذكر ما إذا كانت العلاقة دالة أم لا وإذا كانت دالة أذكر مداها

بيان ع = {(١ ، ٣) ، (٣ ، ٥) ، (٥ ، ٧)}

ع ليست دالة لأن كل عنصر من عناصر س~ لم يظهر كمسقط أول مرة واحدة

مثال [١٦]

إذا كانت س~ = {−١ ، ١ ، ٢} ، ص~ = {٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨} وكانت ع علاقة من س~ إلى ص~ حيث أ ع ب تعنى " ب = ٢أ + ٤ " لكل أ ∈ س~ ، ب ∈ ص~ اكتب بيان ع ثم اذكر ما إذا كانت العلاقة دالة أم لا وإذا كانت دالة أذكر مداها

بيان ع = {(−١ ، ٢) ، (١ ، ٦) ، (٢ ، ٨)}

ع دالة لأن كل عنصر من عناصر س~ يظهر كمسقط أول مرة واحدة

المدى = {٢ ، ٦ ، ٨}

مثال [١٧]

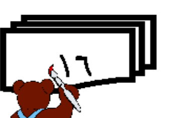
إذا كانت س~ = {١ ، ٢ ، ٣} ، ص~ = {١ ، ٤ ، ٦ ، ء} وكانت ع علاقة من س~ إلى ص~ حيث أ ع ب تعنى ب = أ² لكل أ ∈ س~ ، ب ∈ ص~ احسب قيمة ء ، اكتب بيان ع ثم اذكر ما إذا كانت العلاقة دالة أم لا وإذا كانت دالة أذكر مداها

بيان ع = {(١ ، ١) ، (٢ ، ٤) ، (٣ ، ء)} = {(١ ، ١) ، (٢ ، ٤) ، (٣ ، ٩)}

(٣ ، ء) = (٣ ، ٩) ء = ٩

ع دالة لأن كل عنصر من عناصر س~ يظهر كمسقط أول مرة واحدة

المدى = {١ ، ٤ ، ٩}



مثال (١٨)

إذا كانت س = { ٢ ، ٣ ، ٩ } ، ص = { ١ ، ٣ ، ١١ } وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب بحيث بيان ع = {(٢ ، ١)،(٢ ، ٣)،(٢ ، ١١)} اذكر العلاقة التى تعنى بيان ع

بيان ع = {(٢ ، ١)،(٢ ، ٣)،(٢ ، ١١)}

العلاقة تعنى أ + ب = عدد أولى حيث أ ∈ س ، ب ∈ ص

مثال (١٩)

إذا كانت س = { ١٢ ، ٢٣ ، ٣١ ، ٤٥ ، ٥٢ } ، ص = { ١٤ ، ١٦ ، ١٨ ، ٣٢ ، ٣٤ } وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعنى " أ ، ب لها نفس مجموع الرقمين " لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص اكتب بيان ع و ثم اذكر ما إذا كانت العلاقة دالة أم لا وإذا كانت دالة أذكر مداها

بيان ع = {(٢٣ ، ١٤)،(٢٣ ، ٣٢)،(٥٢ ، ١٦)،(٥٢ ، ٣٤)،(٤٥ ، ١٨)}

ع ليست دالة دالة لأن كل عنصر من عناصر س لم يظهر كمسقط أول مرة واحدة

مثال (٢٠)

إذا كانت س = { ١ ، ٢ ، ٣ } ، ص = { ١٢ ، ٢١ ، ٤٧ ، ٥٢ } وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعنى أ رقم من أرقام العدد ب لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص اكتب بيان ع ثم اذكر ما إذا كانت العلاقة دالة أم لا وإذا كانت دالة أذكر مداها ثم بين أى مما يلى صواب مع ذكر السبب ١ ع ٥٢ ، ٢ ع ٢١ ، ٣ ع ٤٧

بيان ع = {(١ ، ١٢) ، (١ ، ٢١) ، (٢ ، ١٢) ، (٢ ، ٢١) ، (٢ ، ٥٢)}

ع ليست دالة لأن كل عنصر من عناصر س لم يظهر كمسقط أول مرة واحدة

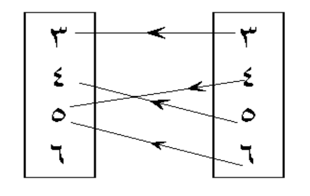
١ ع ٥٢ لا توجد علاقة بين ١ ، ٥٢ لأن العدد ١ لا يدخل فى تركيب العدد ٥٢

٢ ع ٢١ توجد علاقة بين ٢ ، ٥٢ لأن العدد ٢ يدخل فى تركيب العدد ٢١

مثال (٢١)

إذا كانت د دالة على س = {٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦} وكانت د(٣) = ٣ ، د(٤) = ٥ ، د(٥) = ٤ ، د(٦) = ٥ اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى ثم اذكر ما إذا كانت العلاقة دالة أم لا وإذا كانت دالة أذكر مداها

بيان ع = {(٣ ، ٣)،(٤ ، ٥)،(٥ ، ٤)،(٦ ، ٥)}

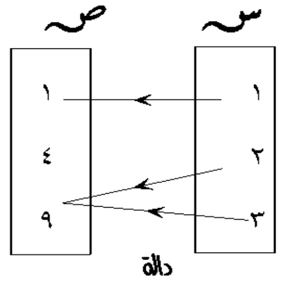


ع دالة لأن كل عنصر من عناصر س لم يظهر كمسقط أول مرة واحدة فقط

المدى = {٣ ، ٤ ، ٥}

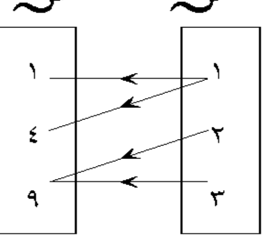
مثال [٢٢]

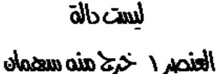
أى من العلاقات التالية تمثل دالة من س إلى ص وإذا كانت العلاقة تمثل دالة أم لا فأوجد مدى الدالة



دالة

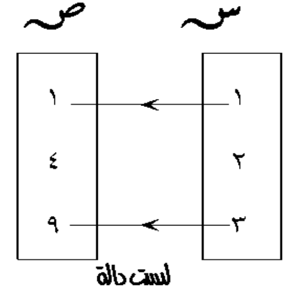
المدى = {١ ، ٩}





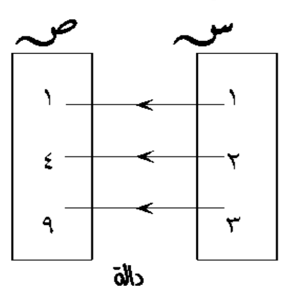
ليست دالة

العنصر ١ خرج منه سهمان



ليست دالة

العنصر ٢ لم يخرج منه سهم

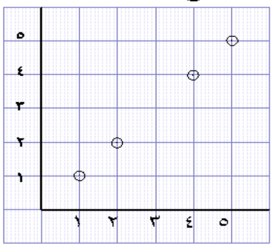


دالة

المدى = {١ ، ٤ ، ٩}

مثال [٢٣]

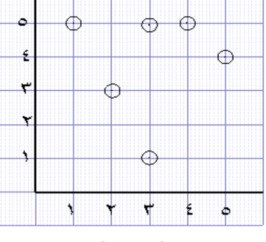
أى من العلاقات التالية تمثل دالة من س إلى ص وإذا كانت العلاقة تمثل دالة أم لا فأوجد مدى الدالة



ع ليست دالة

العنصر ٣ لم يظهر له نقطة

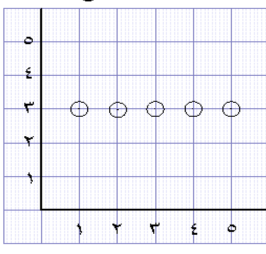
على الخط الرأسى



ع ليست دالة

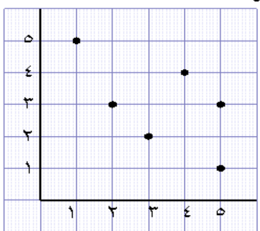
العنصر ٣ ظهر له نقطتين

على الخط الرأسى



ع دالة

المدى = {٣}



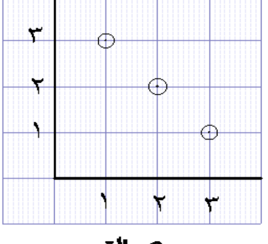
ع ليست دالة

العنصر ٥ ظهر له نقطتين

على الخط الرأسى

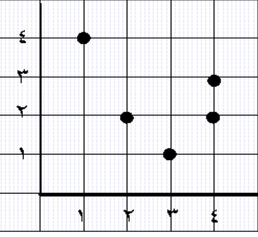
مثال [٢٤]

أى من العلاقات التالية تمثل دالة من س إلى ص وإذا كانت العلاقة تمثل دالة أم لا فأوجد مدى الدالة



ع دالة

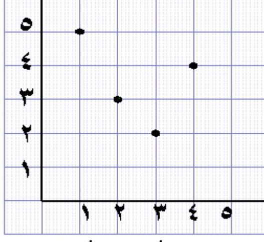
المدى = {١ ، ٢ ، ٣}



ع ليست دالة

العنصر ٤ ظهر له نقطتين

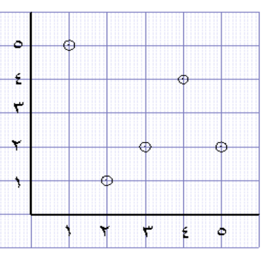
على الخط الرأسى



ع ليست دالة

العنصر ٥ ظهر له نقطتين

على الخط الرأسى



ع دالة

المدى = {١ ، ٢ ، ٤ ، ٥}



(١) اختر الإجابة الصحيحة

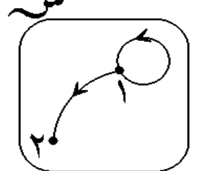
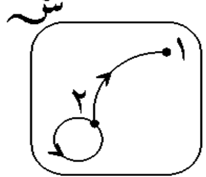
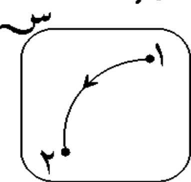
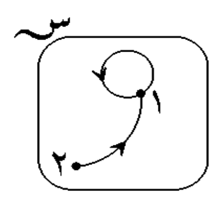
❶ إذا كانت : د دالة من مجموعة س إلى المجموعة ص فإن س تسمى ....

① مدى الدالة د ② المجال المقابل للدالة د
③ مجال الدالة د ④ قاعدة الدالة د

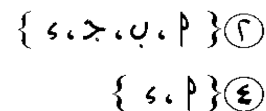
❷ إذا كانت : د دالة من مجموعة س إلى المجموعة ص فإن س مجموعة صور عناصر المجموعة س بواسطة الدالة د تسمى ....

① مدى الدالة د ② المجال المقابل للدالة د
③ مجال الدالة د ④ قاعدة الدالة د

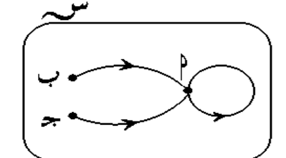
❸ إذا كانت : س = { ١ ، ٢ } فإن : المخطط السهمي الذي يمثل دالة على س هو ....

❹ الشكل المقابل يمثل دالة مداها ....



① { ١ ، ٢ ، ٣ } ② { أ ، ب ، جـ ، د }
③ { جـ ، ب } ④ { أ ، د }



❺ إذا كانت ع دالة بيانها { (١ ، ٣) ، (٢ ، ٥) ، (٤ ، ٧) } فإن مداها = ...

① { ١ ، ٢ ، ٤ } ② { ٢ ، ٤ ، ٧ }
③ { ٣ ، ٥ ، ٧ } ④ { ١ ، ٣ ، ٥ }

❻ الشكل المقابل : يمثل دالة على س مداها ....



① { أ } ② { أ ، ب ، جـ }
③ { أ ، ب } ④ { ب ، جـ }

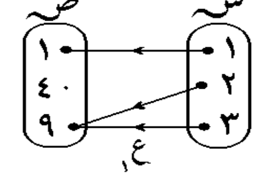
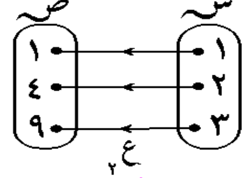
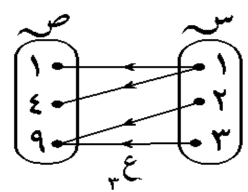
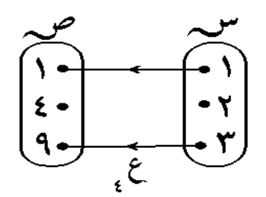
❼ إذا كانت : ع دالة من س إلى ص حيث س = { ٢ ، ٤ ، ٥ } ، ص = { ٦ ، ٧ } وكانت { (٢ ، ٦) ، (أ ، ٦) ، (٥ ، ٦) } فإن : أ = ...

① ٤ ② ١٢ ③ ٦ ④ ٥

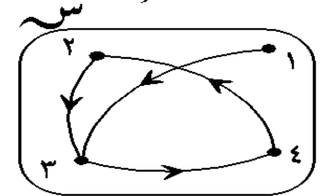
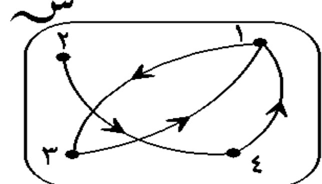
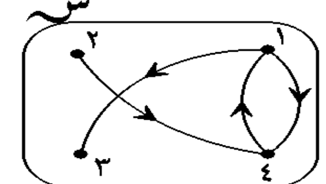
❽ إذا كانت : س = { ٢ ، ٤ ، ٦ } وكانت ن(ص) = ٤ وكانت الدالة د : س ⟵ ص ، د(س) = س^2 − ١ فإن : ص يمكن أن تكون ....

① { ٣ ، ٧ ، ١٣ } ② { ٣ ، ١٥ ، ٣٥ }
③ { ٣ ، ١٥ ، ٢٥ ، ٤٥ } ④ { ٣ ، ١٥ ، ٢٥ ، ٣٥ }

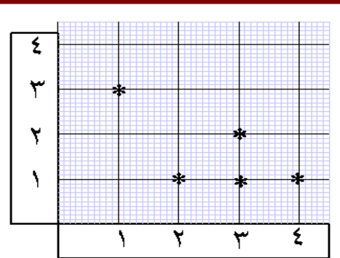
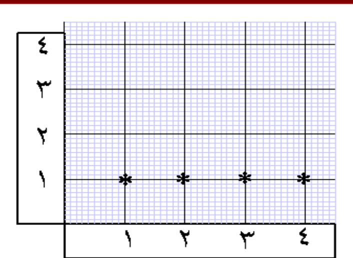
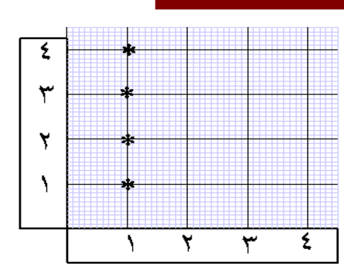
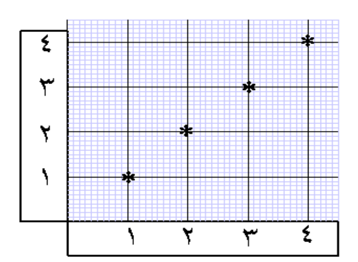
(٢) أي من العلاقات الآتية تمثل دالة من وإذا كانت دالة أذكر مداها

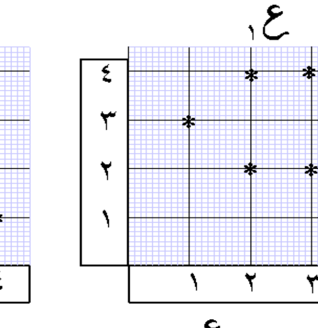
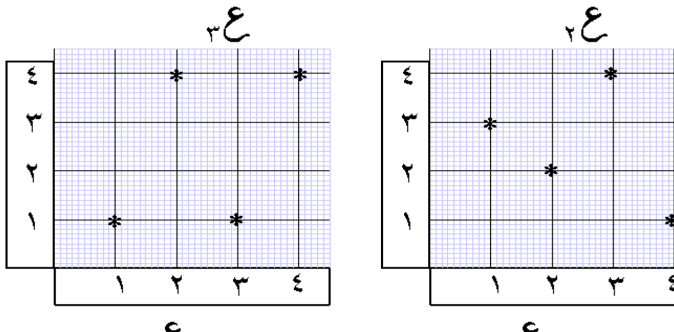
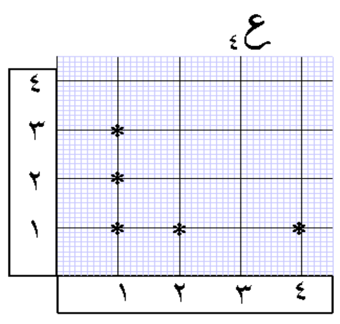
(٣) إذا كانت: س = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ } فأى المخططات السهمية الآتية تعبر عن دالة على المجموعة س ؟

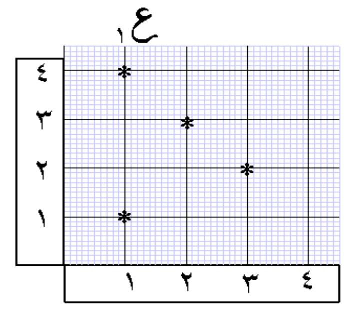
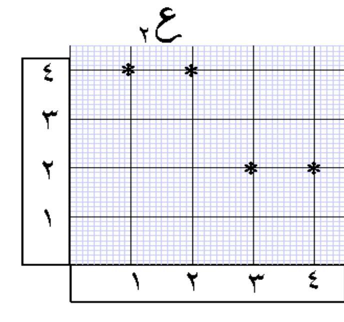
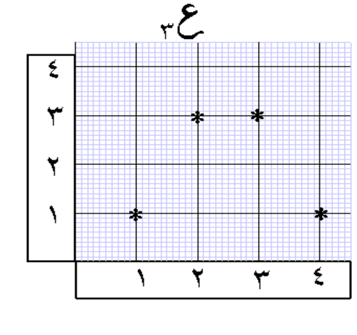
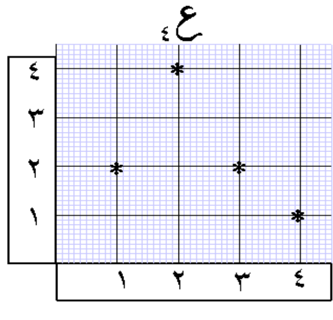
(٤) بين أى المخططات البيانية الآتية يعبر عن دالة وإذا كانت دالة اذكر بيانها ومداها :

ع١ ع٢ ع٣ ع٤

ع١ ع٢ ع٣ ع٤

ع١ ع٢ ع٣ ع٤

(٥) إذا كانت : س = { أ ، ب ، جـ } ، ص = { ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠ }

فأى العلاقات الآتية دالة من س إلى ص وأيها ليست دالة مع ذكر السبب وعين مدى الدالة :

❶ ع١ = { (أ ، ٢) ، (ب ، ٤) }

❷ ع٢ = { (أ ، ٢) ، (ب ، ٤) ، (ب ، ٦) ، (جـ ، ٨) }

❸ ع٣ = { (أ ، ٢) ، (ب ، ٨) ، (جـ ، ١٠) }

❹ ع٤ = { (أ ، ٢) ، (أ ، ٤) ، (ب ، ٦) ، (ب ، ٨) ، (جـ ، ١٠) }

(٦) إذا كانت : س = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ } فبين أى العلاقات الآتية تعبر عن دالة على س ثم أوجد مدى كل دالة :

ع١ = { (١ ، ١) ، (٢ ، ٢) ، (٣ ، ٣) ، (٤ ، ٤) }

ع٢ = { (١ ، ٣) ، (٢ ، ٣) ، (٣ ، ٣) ، (٤ ، ٣) }

ع٣ = { (١ ، ٤) ، (٤ ، ١) ، (١ ، ٢) ، (٢ ، ١) }

(٧) إذا كانت س = { ٣ ، ٤ ، ٥ } ، ص = { ٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠ } وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث " أ ع ب " تعنى " أ = $\frac{1}{2}$ ب " لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى و اذكر مع بيان السبب هل ع دالة

(٨) إذا كانت س = { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ } ، ص = { ٠ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٠ } وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث " ٩ ع ب " تعنى " ٩ + ٧ = ب " لكل ٩ ∈ س ، ب ∈ ص اكتب بيان ع و اذكر مع بيان السبب هل ع دالة من س إلى ص أم لا

(٩) إذا كانت س = { ٢ ، ٥ ، ٨ } ، ص = { ١٠ ، ١٦ ، ٢٤ ، ٣٠ } وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث " ٩ ع ب " تعنى " ٩ عامل من عوامل ب " لكل ٩ ∈ س ، ب ∈ ص اكتب بيان ع و اذكر مع بيان السبب هل ع دالة من س إلى ص أم لا

(١٠) إذا كانت س = { ١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ } ، ص = { ٥ ، ٩ ، ١٠ ، ١٣ ، ١٧ } وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث " ٩ ع ب " تعنى " ب = ٢ ٩ + ٣ " لكل ٩ ∈ س ، ب ∈ ص اكتب بيان ع و اذكر مع بيان السبب هل ع دالة من أم لا

(١١) إذا كانت س = { ٠ ، ١ ، ٤ ، ٧ } ، ص = { ١ ، ٣ ، ٥ ، ٦ } وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث " ٩ ع ب " تعنى " ٩ + ب < ٨ " لكل ٩ ∈ س ، ب ∈ ص اكتب بيان ع و اذكر مع بيان السبب هل ع دالة من س إلى ص أم لا

(١٢) إذا كانت س = { ٦ ، ٤ ، ٢ ، ٠ ، –٢ ، –٤ ، –٦ } وكانت ع علاقة على س حيث " ٩ ع ب " تعنى " ٩ معكوس جمعى لـ ب " لكل ٩ ∈ س ، ب ∈ س اكتب بيان ع و اذكر مع بيان السبب هل ع دالة

(١٣) إذا كانت س = { ٠ ، ١ ، ٢ ، $\frac{1}{2}$ } وكانت ع علاقة على س حيث " ٩ ع ب " تعنى " ٩ معكوس ضربى لـ ب " لكل ٩ ∈ س ، ب ∈ س اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى و اذكر مع بيان السبب هل ع دالة من س إلى س أم لا

(١٤) إذا كانت س = { ١ ، ٢ ، ٤ ، ٦ ، ١٠ } وكانت ع علاقة على س حيث " ٩ ع ب " تعنى " ٩ مضاعف ب " لكل ٩ ∈ س ، ب ∈ س اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى و اذكر مع بيان السبب هل ع دالة أم لا

(١٥) إذا كانت س = { ٠ ، ١ ، ٢ } ، ص = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ } وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث " ٩ ع ب " تعنى " ب = ٣ ٩ " لكل ٩ ∈ س ، ب ∈ ص اكتب بيان ع و اذكر مع بيان السبب هل ع دالة أم لا وإذا كانت دالة اذكر مداها

(١٦) إذا كانت س = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٦ ، ١١ } وكانت ع علاقة على س حيث " ٩ ع ب " تعنى " ٩ + ٢ ب = عدد فردى " لكل ٩ ∈ س ، ب ∈ س اكتب بيان ع و اذكر مع بيان السبب هل ع دالة من أم لا

(١٧) إذا كانت س = { –٢ ، –١ ، ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٩ ، ١٦ } وكانت ع علاقة على س حيث " ٩ ع ب " تعنى " ٩² = ب " لكل ٩ ∈ س ، ب ∈ س اكتب بيان ع و اذكر مع بيان السبب هل ع دالة من أم لا

(١٨) إذا كانت س = { س : س ∈ ط ، ١ ≤ س ≤ ٣ } وكانت ع علاقة على س حيث " ٩ ع ب " تعنى " ٩ + ب يقبل القسمة على ٣ " لكل ٩ ∈ س ، ب ∈ س اكتب بيان ع و اذكر مع بيان السبب هل ع دالة أم لا

(١٩) إذا كانت س = { −٢ ، ٢ ، ٥ } ، ص = { ٣ ، ٧ ، جـ } وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث " أ ع ب " تعنى ب = أ² − ١ " لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص احسب قيمة جـ اكتب بيان ع و اذكر مع بيان السبب هل ع دالة أم لا

(٢٠) إذا كانت : س = { ٠ ، ٤ ، ١٦ } ، ص = { ٠ ، ٢ ، ٤ } فبين أى العلاقات الآتية تمثل دالة من س إلى ص لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص

❶ ع١ حيث " أ ع١ ب " تعنى " أ = ب² "
❷ ع٢ حيث " أ ع٢ ب " تعنى " أ = √ب "
❸ ع٣ حيث " أ ع٣ ب " تعنى " ½ أ = ب "
❹ ع٤ حيث " أ ع٤ ب " تعنى " ب = أ "

(٢١) إذا كانت س = {٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦} وكان د (٣) = ٣ ، د (٤) = ٥ ، د (٥) = ٦ ، د (٦) = ٥ واكتب بيانها .

(٢٢) إذا كانت الدالة د : ط ⟵ ط حيث د : س ⟵ ٢س + ٣
أوجد : د (٠) ، د (١) ، د (٢) ، د (٣) ، د (٤) ، د (٥)
مثل بعض عناصر د : على جزء من الشبكة التربيعية للحاصل الديكارتى ط × ط ما هو مدى د ؟

(٢٣) إذا كانت س = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ } ، ص = { ٠ ، ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠ } و الدالة د : س ⟵ ص
حيث د (س) = ٢س اكتب بيان د (س) واسم المخطط السهمى لها .

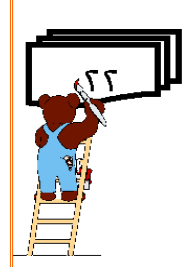
(٢٤) إذا كانت الدالة د : ص ⟵ ص حيث ص مجموعة الأعداد الصحيحة ،
د (س) = س² − ٢س − ٣ أوجد د (٤) ، د (٣) ، د (٢) ، د (−١) ، د (−٢) ، د (٠)
إذا كانت : د (س) = ٥ فأوجد قيمة : س

(٢٦) إذا كانت : س = { ٠ ، ١ ، ٢ } ، ع دالة على س ، بيان ع = { (أ ، ١) ، (ب ، ٠) ، (٠ ، ٢) } فأوجد القيمة العددية للمقدار : أ + ب

(٢٥) أكمل

❶ مدى الدالة ⊂ ....
❷ إذا كانت : د دالة على س وبيانها = { (١ ، ٢) ، (٤ ، ٤) ، (٢ ، ٢) ، (٠ ، ٤) } فان مدى الدالة د = ...
❸ إذا كانت : س = { ٢ ، ٤ ، ٦ } وكانت الدالة د : س ⟵ ع د (س) = ٢س + ٣ فان مدى الدالة د (س) يساوى ....
❹ إذا كانت : د (س) = س² − ١ فان : د (−½) = ...
❺ إذا كانت : د : س ⟵ ص حيث د (س) = س² فان د (٢) + د (−٢) = ...
❻ إذا كان : (−١ ، ٠) ∈ بيان الدالة د حيث د (س) = م س + ٢ فان : م = ...
❼ إذا كان : (٣ ، ص) ∈ بيان الدالة د حيث د (س) = س + ٢ فان : ص = ...
❽ إذا كان : (أ ، أ) ∈ بيان الدالة د حيث د (س) = ٣ س + ٥ فان : أ = ...

(٢٧) إذا كانت س = { −٢ ، −١ ، ٠ ، ١ ، ٢ } ، ص = [٠ ، ٤] وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث " أ ع ب " تعنى " أ² = ب " لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى و هل العلاقة دالة أم لا ؟ مع بيان السبب .



الدوال كثيرات الحدود

الصورة العامة للدوال كثيرات الحدود

د(س) = أ. + أ١ س + أ٢ س^٢ + أ٣ س^٣ + أ٤ س^٤ + ...+ أن سن حيث أن ≠ صفر ، س ∈ ح ، ن ∈ ط

تسمى كثيرات الحدود الحقيقية من الدرجة ن

درجة الدالة كثيرات الحدود

هى أكبر قوة للمتغير س (أكبر أس للمتغير س) فى قاعدة الدالة وهى دائما عدد طبيعى

وعند بحث درجة الدالة يجب تبسيط قاعدتها إلى ابسط صورة قبل تعيين درجتها

مجال الدالة كثيرات الحدود

هى مجموعة الأعداد الحقيقية ح أو مجموعة جزئية منها و مجالها المقابل ومجموعة الأعداد الحقيقية أو مجموعة جزئية منها ايضا

بحث درجة الدوال كثيرات الحدود

❶ د(س) = −٧ دالة كثيرة حدود من الدرجة الصفرية

❷ د(س) = $\sqrt{٣}$ دالة كثيرة حدود من الدرجة الصفرية

❸ د(س) = ٢س + ٣ دالة كثيرة حدود من الدرجة الأولى

❹ د(س) = $\frac{٧ - ٣س}{٢}$ دالة كثيرة حدود من الدرجة الأولى

❺ د(س) = ٢س^٢ − س + ٣ دالة كثيرة حدود من الدرجة الثانية

❻ د(س) = س^٣ + س − ٨ دالة كثيرة حدود من الدرجة الثالثة

بين أى الدوال التالية كثيرة حدود وحدد درجتها

❶ د(س) = ٥س^٣ − ٤س + $\sqrt{٣}$ دالة كثيرة حدود من الدرجة الثالثة

❷ د(س) = ٦س^{-١} + ٤س + س^٣ ليست كثيرة حدود لأنها دالة كسرية لظهور الحد س^{-١} وهو ليس عدد طبيعى

❸ د(س) = ٥^٢ كثيرة حدود لأنها دالة ثابتة من الدرجة الصفرية

❹ د(س) = ٣^{٤س} ليست كثيرة حدود لأنها دالة أسية

❺ د(س) = $\frac{٢س^٣}{٤س + ٣}$ ليست كثيرة حدود لأنها دالة كسرية (لظهور المتغير س فى المقام)

❻ د(س) = س(س + $\frac{١}{س}$ − ٢) ليست كثيرة حدود لأن مجالها ليس مجموعة الأعداد الحقيقية لأن الحد $\frac{١}{س}$ غير معرف عند س = ٠

❼ د(س) = س^٢ + $\sqrt{س}$ + ٨ ليست كثيرة حدود لأن مجالها ليس مجموعة الأعداد الحقيقية

ابحث درجة الدوال التالية

❶ د(س) = س^٢ − (س^٢ − ٣) دالة كثيرة حدود من الدرجة الصفرية

❷ د(س) = س^٢ (س − ٣)^٢ دالة كثيرة حدود من الدرجة الرابعة

❸ د(س) = س (س − ٣س^٢) دالة كثيرة حدود من الدرجة الثالثة

مع أرق تمنياتي بالنجاح والتفوق ...أ/ وليد رشدى

الدالة الثابتة

الدالة الثابتة هى دالة د : ح ← ح حيث د(س) = ﺃ **من الدرجة الصفرية حيث** ﺃ ≠ صفر

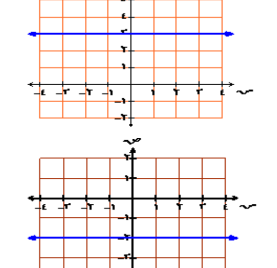
مجال الدالة الثابتة د : ح ← ح حيث د(س) = ﺃ هى ح

مدى الدالة الثابتة د : ح ← ح حيث د(س) = ﺃ هى { ﺃ }

التمثيل البيانى للدالة الثابتة

يمثلها دائما خط مستقيم أفقى يوازى محور السينات ويقطع محور الصادات فى النقطة (٠ ، ﺃ)

هذه الدالة تمثل بخط مستقيم يبعد عن محور السينات مسافة | ﺃ | وحدة طول



❶ تمثل بخط مستقيم يقع أعلى محور السينات إذا كانت ﺃ > الصفر مثل د(س) = ٣

❷ تمثل بخط مستقيم يقع أسفل محور السينات إذا كانت ﺃ < الصفر مثل د(س) = −٣

❸ تمثل بخط مستقيم ينطبق على محور السينات إذا كانت ﺃ = الصفر مثل د(س) = صفر

الدالة الصفرية حالة خاصة من الدالة الثابتة

عندما ﺃ = ٠ تسمى الدالة د حيث د(س) = صفر دالة صفرية (ليس لها درجة) ويمثلها بيانيا محور السينات نفسه

مجال د(س) = ٠ هو ح ومداها { ٠ }

معادلة محور السينات هى د(س) = ٠ أو ص = ٠ ويمثلها بيانيا مجموعة النقط (س ، صفر) لكل س ∈ ح

تذكر أن

❶ **معادلة محور السينات هى** د(س) = صفر **أو** ص = ٠

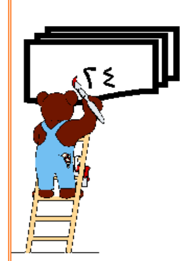
❷ **معادلة محور الصادات** س = ٠ **وميله غير معرف**

❸ **المعادلة** س = ﺃ **يمثلها خط مستقيم يوازى محور الصادات ويبعد عنه مسافة** ﺃ **ويقطع محور السينات فى لنقطة** (ﺃ ، صفر)

❹ **إذا كانت** د(س) = ٧ **فإن** د(−س) = ٧ ، د($س^٢$) = ٧ ، د($س^٣$) = ٧

د(س − ٣) = ٧ ، د(س + ١) = ٧ ، د(عفريت) = ٧

❺ د(س) = −٥ **يمثلها مستقيم يوازى محور السينات ويقطع محور الصادات فى النقطة** (٠ ، −٥) **ويبعد عن محور السينات مسافة** ٥ **وحدة طول و يقع اسفل محور السينات مجال** د(س) = −٥ هى ح ، **مدى** د(س) = −٥ هو { −٥ }



❻ **إذا كانت** د (س) = ٣ **أوجد قيمة** $\frac{د(٤) + د(٥)}{د(-١)} = \frac{٣ + ٣}{٣} = \frac{٦}{٣} = ٢$

❼ **إذا كانت** د (س) = −٢ **أوجد قيمة** $\frac{٣ د(٥)}{٧ د(-٤)} = \frac{٣(-٢)}{٧(-٢)} = \frac{٣}{٧}$

❽ **إذا كانت** د (س) = أ **وكانت** د (٢) = ٣ **فإن** د (٥) = ٣

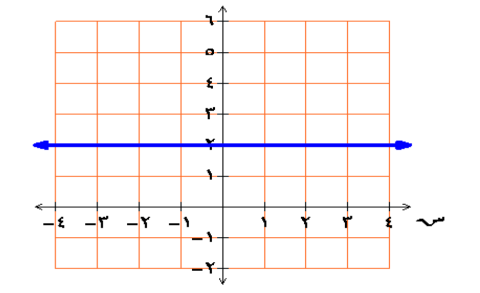
❾ **إذا كانت** د (س) = $س^{ب}$ ، **وكانت** د (٣) = ٨١ احسب قيمة ب

د (٣) = $(٣)^{ب}$ = ٨١ ⟸ $(٣)^{ب}$ = $٣^{٤}$ ⟸ ب = ٤

مثال [١]

مثل بيانيا د (س) = ٢ **واذكر خواص الدالة**

الحل



يمثلها مستقيم يوازى محور السينات ويقع أعلاه

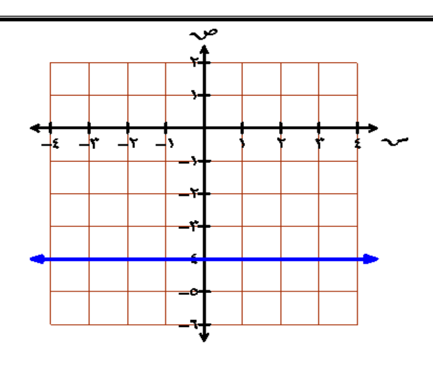
ويقطع محور الصادات فى النقطة (٠ ، ٢)

ويبعد عن محور السينات مسافة ٢ وحدة طول

مثال [٢]

مثل بيانيا د (س) = −٤ **واذكر خواص الدالة**

الحل



يمثلها مستقيم يوازى محور السينات ويقع أسفله

ويقطع محور الصادات فى النقطة (٠ ، −٤)

ويبعد عن محور السينات مسافة ٤ وحدة طول

الدالة الخطية

❶ **الدالة الخطية هى دالة من دوال كثيرات الحدود من الدرجة الأولى**

د : ح ← ح حيث د(س) = أ س + ب

حيث أ ، ب ∈ ح ، أ ≠ صفر أى أن أ ∈ ح − {صفر}

❷ **مجال الدالة** د : ح ← ح حيث د(س) = أ س + ب **هى** ح

❸ **مدى الدالة** د : ح ← ح حيث د(س) = أ س + ب **هى** ح

❹ **تمثل بيانيا بخط مستقيم يقطع محور السينات فى النقطة** $(\frac{-ب}{أ}$ ، صفر) ، **يقطع محور الصادات فى النقطة** (صفر ، ب)

تمثل بيانيا الدالة د : ح ← ح حيث د(س) = أ س + ب **بخط مستقيم مائل و يكون باحدى الصورتين**

بالصورة ↗ عندما يكون أ > صفر (معامل س موجب)

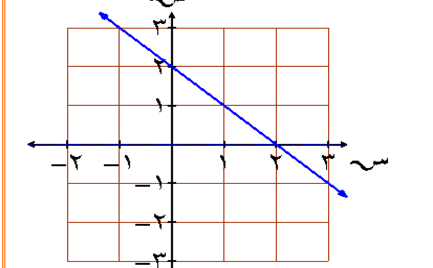
و بالصورة ↖ عندما يكون أ < صفر (معامل س سالب)

❺ **إذا كان الحد المطلق = صفر فان المستقيم يمر بنقط الأصل و تكون معادلته** د(س) = أ س

لأنه يمر بنقطة الأصل (٠ ، ٠) التى ∈ لبيان الدالة

مثال (١)

ارسم الدالة د(س) = ٢ − س



د(س) = ٢ − س **ثم نعين النقطتين** (٠ ، ب) ، $(\frac{-ب}{أ}$ ، ٠)

س	٠	٢
ص	٢	٠

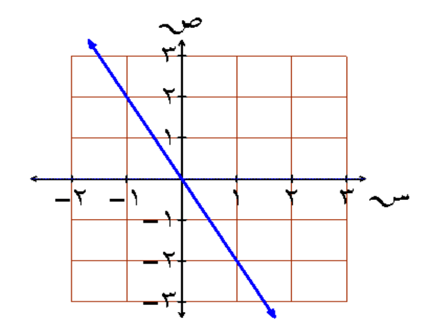
يقطع محور السينات (٢ ، ٠)

يقطع محور الصادات (٠ ، ٢)

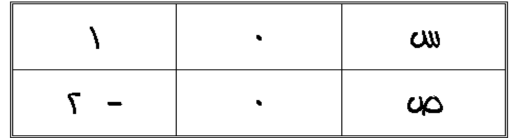
المجال = ح المدى = ح



ارسم الدالة د(س) = −٢س



د(س) = −٢س **ثم نعين النقطتين** (٠ ، ب) ، $(\frac{-ب}{أ}$ ، ٠)



س	٠	١
ص	٠	−٢

يقطع محور السينات (٠ ، ٠)

يقطع محور الصادات (٠ ، ٠)

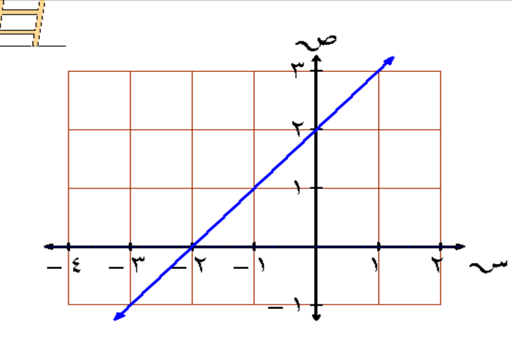
المجال = ح **المدى** = ح

مثال [٣]

ارسم الدالة د (س) = س + ٢

د(س) = س + ٢ ثم نعين النقطتين (٠ ، ب) ، ($\frac{-ب}{م}$ ، ٠)

س	٠	- ٢
ص	٢	٠



يقطع محور السينات (-٢ ، ٠)

يقطع محور الصادات (٠ ، ٢)

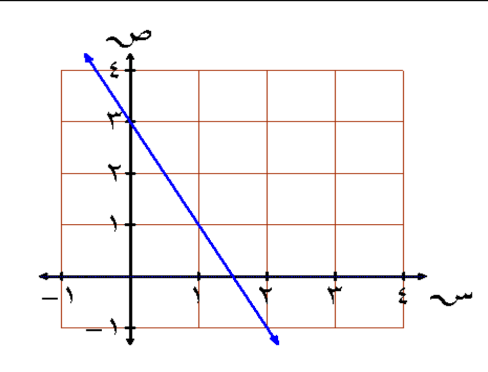
المجال = ح المدى = ح

مثال [٤]

ارسم الدالة د(س) = ٣ - ٢ س

د(س) = ٣ - ٢س ثم نعين النقطتين (٠ ، ب) ، ($\frac{-ب}{م}$ ، ٠)

س	٠	١
ص	٣	١



يقطع محور السينات ($\frac{٣}{٢}$ ، ٠)

يقطع محور الصادات (٠ ، ٣)

المجال = ح المدى = ح

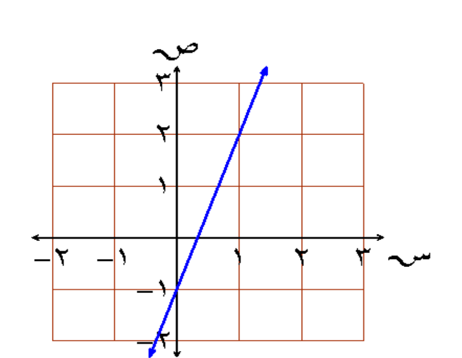


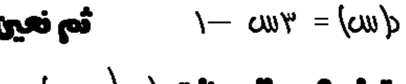
مثال [٥]

ارسم الدالة د (س) = ٣س - ١

د(س) = ٣س - ١ ثم نعين النقطتين (٠ ، ب) ، ($\frac{-ب}{م}$ ، ٠)

س	٠	١
ص	-١	٢





يقطع محور السينات ($\frac{١}{٣}$ ، ٠)

يقطع محور الصادات (٠ ، -١)

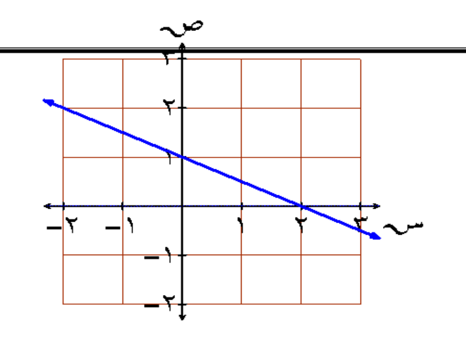
المجال = ح المدى = ح

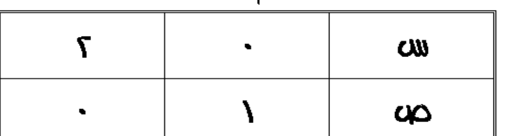


مثال [٦]

ارسم الدالة د(س) = ١ - $\frac{١}{٢}$ س

د(س) = ١ - $\frac{١}{٢}$س ثم نعين النقطتين (٠ ، ب) ، ($\frac{-ب}{م}$ ، ٠)



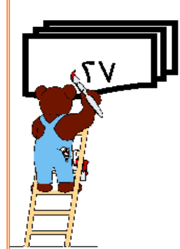


س	٠	٢
ص	١	٠

يقطع محور السينات (٢ ، ٠)

يقطع محور الصادات (٠ ، ١)

المجال = ح المدى = ح



تمارين على الدالة الثابتة والخطية

(١) أكمل ما يأتى :

❶ الدالة د : د (س) = ٧ كثيرة حدود من الدرجة ....

❷ إذا كانت الدالة د : ح ← ح حيث د (س) = م ، م ∈ ح – { ٠ } فان د تسمى دالة .... ودرجتها ....

❸ إذا كانت دالة كثيرة حدود حيث د (س) = س^٣ + ١ فان : درجة د هى .... ، د (–١) = ...

❹ الدالة د : ح ← ح حيث د (س) = ٥ يمثلها خط مستقيم يوازى .... ويقطع محور الصادات فى النقطة ....

❺ الدالة د (س) = –٣ يمثلها بيانيا خط مستقيم يوازى محور......ويبعد عنه مسافة ......وحدة طول لأسفل ويقطع محور ...... فى النقطة (... ، ...)

❻ فى الشكل المقابل : د (س) = ... وهى دالة ...... من الدرجة ....
د (٢) = ... ، الشكل البيانى للدالة يوازى محور .... ، ويقطع محور .... فى النقطة ....

❼ الدالة د (س) = –٣ م تمثل بيانيا بخط مستقيم أفقى يقع أعلى محور السينات عندما م ∈] ... ، ... [

❽ مجال الدالة د (س) = ٦ هو ....

❾ إذا كانت د (س) = ٣ فان د (س + ٧) = ...

❿ إذا كانت د (س) = ٢ فان $\frac{د(٤) - د(٥)}{د(صفر)}$ = ...

⓫ إذا كانت د (س) = س^٢ – ٣ فان : د (٠) + د ($\sqrt{٥}$) = ...

⓬ إذا كانت (–٢ ، م) ينتمى للدالة د (س) = س + ٤ فان : م = ...

⓭ إذا كانت د (س) ٢س (٣س – س^٢) – ٥ + ٢س^٣ فان د (س) كثيرة حدود من الدرجة ....

⓮ إذا كانت د (س) = س^٢ – ٤س + ١ وكانت د (م) = ١ فان م = ... أو ......

⓯ الشكل البيانى للدالتين د (س) = ١ ، د (س) = –١ يكونان خطين ....

⓰ إذا كانت د (س) = م س^٢ + ب س + جـ دالة ثابتة إذا كانت .... = ... = ...

⓱ إذا كانت د (س) = (م – ١) س^٢ + ب س + جـ دالة من الدرجة الثانية فان م ≠ ....

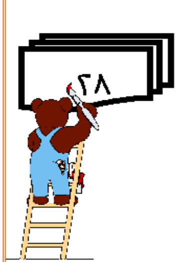
⓲ إذا كانت د (س) = (م + ٤) س^٢ + ب س + جـ دالة من الدرجة الثانية فان م ≠ ....

(٢) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

❶ إذا كانت الدالة د حيث د (س) = ٤ فإنها تمثل بيانيا بواسطة ....
(١) محور السينات (٢) محور الصادات (٣) مستقيم يوازى محور السينات (٤) مستقيم يوازى محور الصادات

❷ إذا كانت د (س) = ٢ يمثلها مستقيم يوازى ....
(١) محور السينات (٢) محور الصادات (٣) مستقيم ص = س – ١ (٤) مستقيم ص = س + ٢

❸ إذا كانت د (س) = ٥ فان ....
(١) د (٥) = $\frac{١}{٢}$ د (٣) (٢) د (٥) > د (٣) (٣) د (٥) = د (٣) (٤) د (٥) = ٢د (٣)



④ إذا كانت د(س) = ٢ فان ٣ د(٥) = ...

(١) ١٥ (٢) ٥ (٣) د(١٥) (٤) ٦

⑤ إذا كانت د(س) = —٣ فان د(٠) + د(١) + د(٣) = ...

(١) —٣ (٢) ١٢ (٣) —٩ (٤) ٣

⑥ الدالة د(س) = س^٤ —(س^٢ — ١)(س^٢ + ١) دالة كثيرات حدود من الدرجة ....

(١) الأولى (٢) الصفرية (٣) الثانية (٤) الرابعة

⑦ الدالة د(س) = ٣ — ٢س^٢ فان د($\sqrt{2}$) = ...

(١) ٣ (٢) —١ (٣) ١ (٤) —٣

⑧ إذا كانت د(س) = ٢ س + ١ فان د(—$\frac{١}{٢}$) = ...

(١) صفر (٢) $\frac{١}{٤}$ (٣) ٣ (٤) ٤

⑨ إذا كانت د(س) = س^٢ + ٥س + جـ وكانت د(٠) = ٣ فان جـ = ...

(١) صفر (٢) ٥ (٣) ١ (٤) ٣

⑩ قيمة ﻡ التى تجعل المعادلة ص = ﻡ س^٢ + ب س + جـ خطية تساوى ....

(١) صفر (٢) ١ (٣) ٢ (٤) —١

⑪ إذا كانت د(س) = ٢ فان د($\sqrt{2}$) = ...

(١) ٢ (٢) $\sqrt{2}$ (٣) $\frac{١}{\sqrt{2}}$ (٤) —$\sqrt{2}$

⑫ الدالة د(س) = (س — ١)(س + ١) دالة كثيرة حدود من الدرجة ....

(١) الأولى (٢) الثانية (٣) الثالثة (٤) الرابعة

⑬ الدالة د(س) = س(س — ٢)^٢ دالة كثيرة حدود من الدرجة ....

(١) الأولى (٢) الثانية (٣) الثالثة (٤) الرابعة

⑭ الدالة د(س) = (س + ١)^٢(س — ١)^٢ دالة كثيرة حدود من الدرجة ....

(١) الأولى (٢) الثانية (٣) الثالثة (٤) الرابعة

[٣] مثل بيانياً منحنى كلاً من الدوال الآتية

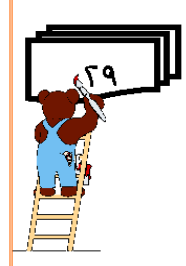
❶ د(س) = ٤ ❷ د(س) = صفر ❸ د(س) = — ١

[٤] مثل بيانياً الدوال الخطية التالية و أوجد نقط تقاطع المستقيم الممثل لكل منها مع محورى الإحداثيات :

❶ د(س) = ٣ س ❷ د(س) = س — ٢

❸ د(س) = ٣ — س ❹ د(س) = —٣ س + ٤

❺ د(س) = س + ١ ❻ د(س) = — س



[٥] إذا كانت د(س) = ٢س +٣ أوجد د(٠)، د(١)، د(٢)، د(-٣)، د(٠,٥)

[٦] إذا كانت د(س) = س² - ٥ س + ٦ أوجد د(٠)، د(١)، د(٢)، د(٣)، د(-١)

[٧] إذا كانت د(س) = س² +١ أوجد د(٠)، د(٣)، د(-٢)، د(٤)

[٨] إذا كانت د(س) = (س - ١)² أوجد د(٠)، د(١)، د(٢)، د(٣)، د(-٣)

[٩] إذا كانت د : ح ← ح أذكر درجة د ثم أوجد د(-٢) ، د(٠) ، د(٢) ، د($\frac{1}{3}$) ، د($\sqrt{3}$)

① د(س) = ٣ ② د(س) = ٣ س - ٤ ③ د(س) = س² - ١

[١٠] أكمل العبارات الآتية

❶ إذا كانت د(س) = ٦ فان : د(س²) = ...

❷ إذا كانت د(س³) = ٨ فان : د(س) = ...

❸ إذا كانت د(س + ٢) = ٣ فان : د(س) = ...

❹ د(س) = ٢ فان : د(س - ٢)

❺ درجة المقدار ٣س² - ٥ س⁴ + ١ هى ....

❻ إذا كانت د(س) = ١ فإن د(-س) = ...

❼ إذا كانت د(س) = ٣ فإن د(٢) + د(-٢) = ...

❽ إذا كانت د(س) = ٥ فإن د(١) + د(٢) + د(٣) = ...

❾ إذا كانت د(س) = ٢ فإن ٢ د(٣) = ...

❿ إذا كان د(س) = ٣ فإن ٣ د(٢) - ٢ د(٣) = ...

⓫ إذا كانت د(س) = -٩ فإن د(٢) × د(٣) = ...

⓬ إذا كانت د(س) = ٨ فإن $\frac{٣ د(٥)}{٧ د(٢)}$ = ...

⓭ إذا كانت د(س) = س فإن ٢ د(٥) - ٥ د(٢) = ...

⓮ إذا كانت د(س) = س فإن د(٣) + د(-٣) = ...

⓯ إذا كانت د(س) = س فإن د(٣) - د(-٣) = ...

⓰ إذا كانت د(س) = ﺃ س +٦ وكانت د(٢) = ٢ فإن ﺃ = ...

⓱ إذا كانت د(س) = ٣ فإن : د(٢) .... د(٥)

⓲ الدالة د(س) = (٥ - س²)³ من الدرجة ....

⓳ الدالة د(س) = ﺃ س + ب تكون تزايدية إذا كانت ....

⓴ الدالة د(س) = ﺃ س + ب تمر بنقطة الأصل فإن ب = ...

㉑ الدالة د(س) = ٣ كثيرة حدود من الدرجة ....

㉒ الدالة د(س) = (س +٢)² - س² من الدرجة ....

㉓ إذا كانت د(س) = س³ +٥ فإن د(٠) = ...

㉔ الدالة د(س) = ﺃ س + ب تكون تناقصية إذا كانت .....

㉕ إذا كانت د(س) = ٣ فإن د(س+٢) = ...

الدالة التربيعية

الدالة د : ح ← ح التي معادلتها د(س) = $أ س^2 + ب س + جـ$ ، أ، ب، جـ ∈ ح ، أ ≠ صفر

دالة كثيرة حدود من الدرجة الثانية وتسمى دالة تربيعية

و يمثلها بيانيا منحنى له فرعان متماثلان يسمى قطع مكافئ يكون بالصورة :

ملاحظات

❶ إحداثيات رأس المنحنى $\left(\frac{-ب}{٢أ} ، د\left(\frac{-ب}{٢أ}\right) \right)$

❷ معادلة محور التماثل س = $\frac{-ب}{٢أ}$ أي أن س = الاحداثى السينى لرأس المنحنى

❸ محور التماثل يوازى المحور الصادات ويمر برأس المنحنى

تكون الدالة قيمة صغرى إذا كانت أ > صفر (فتحة المنحنى لأعلى)

تكون الدالة قيمة عظمى إذا كانت أ < صفر (فتحة المنحنى لأسفل)

مثال (١)

مثل بيانيا الدالة د(س) = س² على الفترة [-٣ ، ٣] ومن الرسم أوجد :

❶ ومعادلة محور التماثل ❷ احداثى نقطة رأس المنحنى ❸ القيمة العظمى والصغرى للدالة

❶ معادلة محور التماثل س = ٠

❷ نقطة رأس المنحنى (٠ ، ٠)

❸ قيمة صغرى = ٠





❶ ومعادلة محور التماثل ❷ احداثى نقطة رأس المنحنى ❸ القيمة العظمى والصغرى للدالة

❶ معادلة محور التماثل س = ٠

❷ نقطة رأس المنحنى (٠ ، ٠)

❸ قيمة عظمى = ٠



مثال [٣]

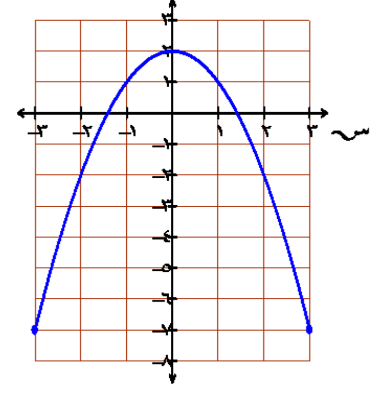
مثل بيانيا الدالة د(س) = ٢ − س ٢ على الفترة [−٣ ، ٣] ومن الرسم أوجد :

❶ ومعادلة محور التماثل　❷ احداثى نقطة رأس المنحنى　❸ القيمة العظمى والصغرى للدالة

❶ معادلة محور التماثل س = ٠

❷ نقطة رأس المنحنى (٠ ، ٢)

❸ قيمة عظمى = ٢



مثال [٤]

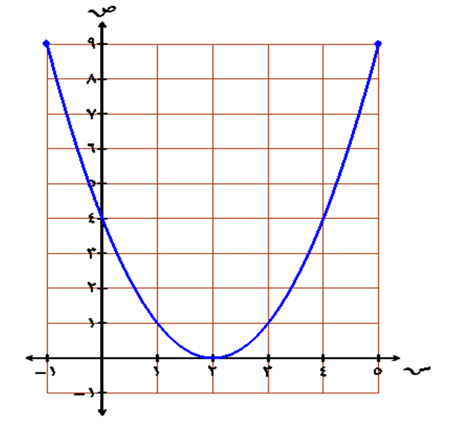
مثل بيانيا الدالة د(س) = (س − ٢)٢ على الفترة [−١ ، ٥] ومن الرسم أوجد :

❶ ومعادلة محور التماثل　❷ احداثى نقطة رأس المنحنى　❸ القيمة العظمى والصغرى للدالة

❶ معادلة محور التماثل س = ٢

❷ نقطة رأس المنحنى (٢، ٠)

❸ قيمة صغرى= ٠



مثال [٥]

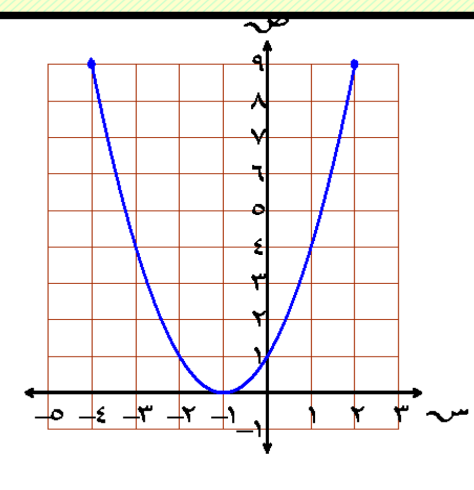
مثل بيانيا الدالة د(س) = س٢ + ٢ س + ١ على الفترة [−٤ ، ٢] ومن الرسم أوجد :

❶ ومعادلة محور التماثل　❷ احداثى نقطة رأس المنحنى　❸ القيمة العظمى والصغرى للدالة

❶ معادلة محور التماثل س = −١

❷ نقطة رأس المنحنى (−١، ٠)

❸ قيمة صغرى= ٠



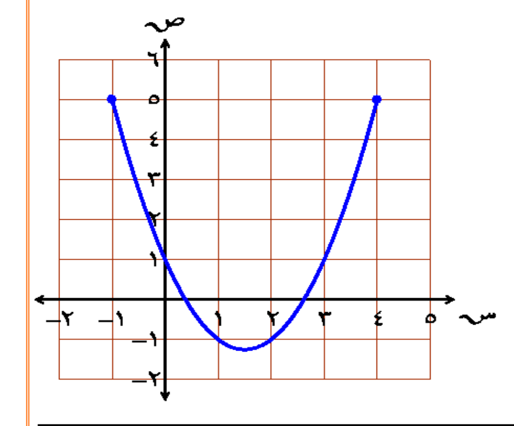




مثل بيانيا الدالة د(س) = ١ −٣ س + س^2 على الفترة [−١ ، ٤] ومن الرسم أوجد :

❶ ومعادلة محور التماثل ❷ احداثى نقطة رأس المنحنى ❸ القيمة العظمى والصغرى للدالة

❶ **معادلة محور التماثل** س = ١,٥



❷ **نقطة رأس المنحنى** (١,٥ ، − ١,٢٥)

❸ **قيمة صغرى** = − ١,٢٥

مثال (٧)

مثل بيانيا الدالة د(س) = ٢ س − ٢ − س^2 على الفترة [−١ ، ٣] ومن الرسم أوجد :

❶ ومعادلة محور التماثل ❷ احداثى نقطة رأس المنحنى ❸ القيمة العظمى والصغرى للدالة

❶ **معادلة محور التماثل** س = ١

❷ **نقطة رأس المنحنى** (١ ، −)

❸ **قيمة عظمى** = −١

مثال (٨)

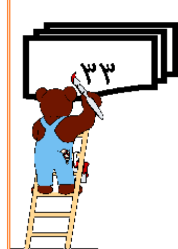
مثل بيانيا الدالة د(س) = ٣س^2 − ٦س + ٥ على الفترة [−١ ، ٣] ومن الرسم أوجد :

❶ ومعادلة محور التماثل ❷ احداثى نقطة رأس المنحنى ❸ القيمة العظمى والصغرى للدالة

❶ **معادلة محور التماثل** س = ١

❷ **نقطة رأس المنحنى** (١، ٢)

❸ **قيمة صغرى** = ٢



تمارين على الدالة التربيعية

(١) أكمل مكان النقط بالإجابة المناسبة فى كل مما يأتى :

❶ منحنى د (س) = $س^٢$ متماثل حول ....

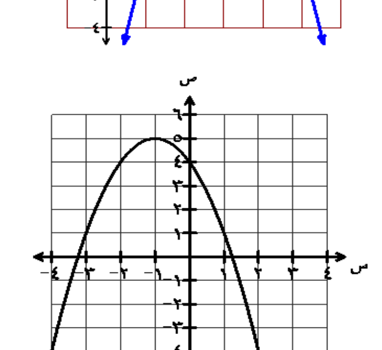
❷ معادلة خط التماثل للدالة د حيث د (س) = $س^٢$ هى ....

❸ الاحداثى السينى لرأس منحنى الدالة = — $س^٢$ + ٥ يساوى .... ويكون .... وهو خط تماثل منحنى الدالة د

❹ إذا كانت : (٢ ، ص) ∈ منحنى الدالة د (س) = ٢$س^٢$ — س + ٥ فان ص = ...

❺ إذا كانت د (س) = م $س^٢$ — ٢س + ١ فان مجموعة قيم م التى تجعل د لها نقطة قيمة عظمى هى ....

❻ الشكل المقابل يمثل منحنى دالة تربيعية :



(١) نقطة القيمة العظمى ....

(٢) القيمة العظمى = ...

(٣) معادلة خط التماثل هى : ....

❼ الشكل المقابل :

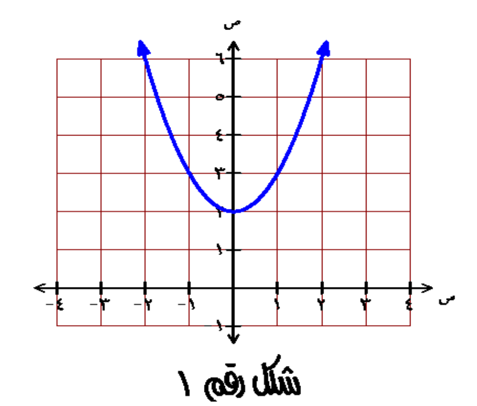
التمثيل البيانى للدالة التربيعية د فأكمل ما يأتى :

(١) نقطة القيمة العظمى ....

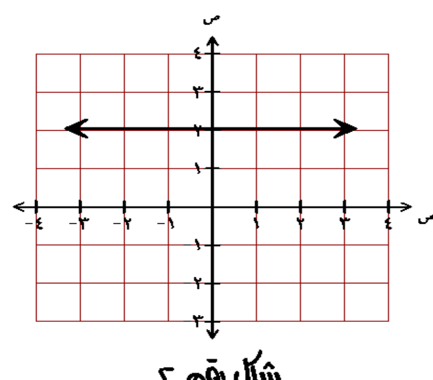
(٢) القيمة العظمى = ...

(٣) معادلة خط التماثل هى : ....

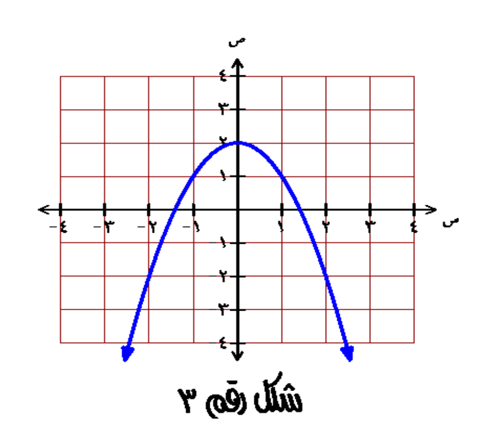
❽ من الأشكال التالية أكمل ما يلى :



شكل رقم ١



شكل رقم ٢

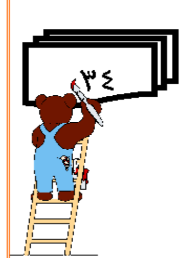


شكل رقم ٣

(١) الدالة د (س) = ٢ — $س^٢$ لكل س ي ح يمثلها بيانيا : الشكل رقم .... لأنها دالة .... ، معامل ....سالب

(٢) الدالة ر (س) = $س^٢$ + ٢ يمثلها الشكل رقم .... ، وتكون مجموعة حل المعادلة ر (س) = ٠ هى ....

(٣) الدالة ف (س) = ٢ يمثلها الشكل رقم .... ، ويكون مدى الدالة ف هو ....



(٢) اختر الإجابة المناسبة مما بين القوسين فى كل مما يأتى :

❶ عدد محاور تماثل منحنى الدالة التربيعية = ...

(١) ٢ (٢) ١ (٣) صفر (٤) ٤

❷ إذا كان منحنى الدالة التربيعية مفتوحا إلى أسفل ، فان معامل س^{٢} يكون ....

(١) موجبا (٢) سالبا (٣) صفر (٤) غير ذلك

❸ الدالة التربيعية د (س) = م س^{٢} — ٢س + ٤ لها قيمة عظمى عندما م = ...

(١) —١ (٢) ٢ (٣) ٤ (٤) ٨

❹ الدالة د حيث د (س) = س^{٢} ، س ∈ ح معادلة محور تماثلها س = ...

(١) صفر (٢) ١ (٣) ٢ (٤) —٢

❺ منحنى الدالة د (س) = س^{٢} — ٤ يقطع محور الصادات عند النقطة ....

(١) (٢ ، ٠) (٢) (٠ ، —٤) (٣) (—٢ ، ٠) (٤) (٠ ، ٠)

❻ إذا كانت النقطة (٢ ، ص) تقع على محور الدالة د (س) = ٣ س^{٢} — س + ٢ فان ص = ...

(١) ٦ (٢) ٨ (٣) ١٠ (٤) ١٢

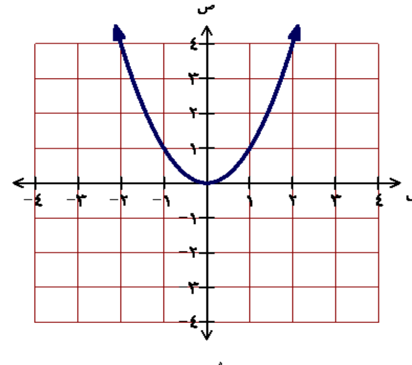
❼ إذا كانت النقطة (٢ ، م) ∈ منحنى الدالة د (س) = س^{٢} — س فان قيمة م = ...

(١) صفر (٢) ١ (٣) ٢ (٤) ٣

❽ إذا كان الزوج المرتب (٠ ، ٣ م) يمثل بنقطة ∈ منحنى الدالة د (س) = ٣س^{٢} — س + ١٢ فان : م = ...

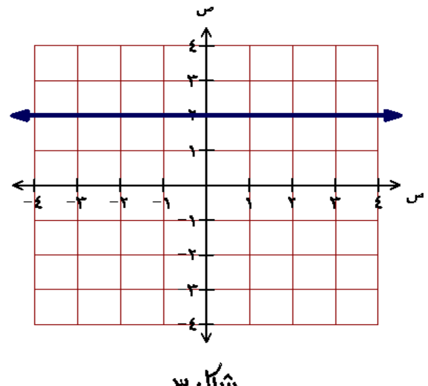
(١) ١٢ (٢) ٢ (٣) ٤ (٤) ٦

❾ من مجموعة الدوال الآتية اكتب الدالة المناظرة لكل شكل من الأشكال الآتية



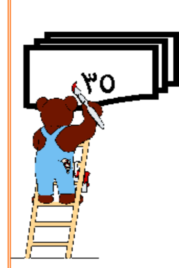
شكل ١

شكل ٢



شكل ٣

(١) ص = س^{٢} (٢) ص = ٢س (٣) ص = (٢ — س) (٢ + س) (٤) ص = ٢





(٣) مثل بيانياً كلاً من الدوال التالية و من الرسم إستنتج إحداثى رأس المنحنى و معادلة محور التماثل و القيمة الصغرى أو العظمى للدالة

١) د(س) = س^٢ متخذاً س ∈ [−٣ ، ٣]

٢) د(س) = − س^٢ متخذاً س ∈ [−٣ ، ٣]

٣) د(س) = ٢س^٢ متخذاً س ∈ [−٢ ، ٢]

٤) د(س) = −٣س^٢ متخذاً س ∈ [−٢ ، ٢]

٥) د(س) = ٤س + ٣ − ٢س^٢ متخذاً س ∈ [−٤ ، ٤]

٦) د(س) = س^٢ − ١ متخذاً س ∈ [−٢ ، ٢]

٧) د(س) = ٤ − س^٢ متخذاً س ∈ [−٢ ، ٢]

٨) د(س) = س^٢ + ٣ متخذاً س ∈ [−٢ ، ٢]

٩) د(س) = س^٢ + ٢س + ١ متخذاً س ∈ [−٤ ، ٢]

١٠) د(س) = س^٢ − ٤س + ٥ متخذاً س ∈ [٠ ، ٥]

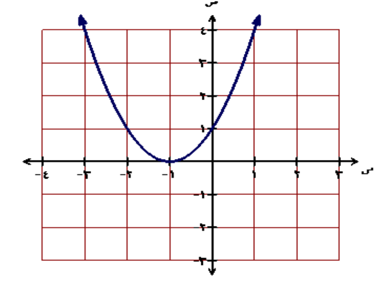
١١) د(س) = س^٢ − ٦س + ٧ متخذاً س ∈ [٠ ، ٦]

١٢) د(س) = س^٢ − ٣س + ١ متخذاً س ∈ [−١ ، ٤]

١٣) د(س) = ٣ − ٢س − س^٢ متخذاً س ∈ [−٤ ، ٢]

١٤) د(س) = (س − ٢)^٢ متخذاً س ∈ [−١ ، ٥]

(٤) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د :



١) أوجد نقطة رأس التماثل للمنحنى

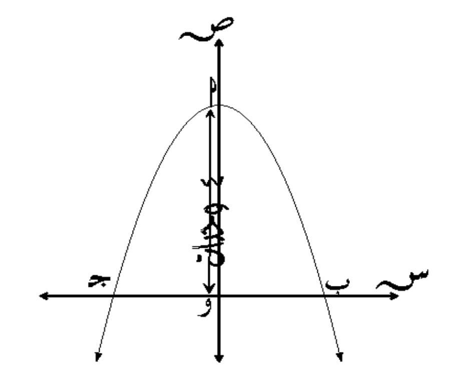
٢) أوجد معادلة خط التماثل للمنحنى .

٣) أوجد القيمة العظمى أو الصغرى

(٥) إذا كان منحنى الدالة د(س) = س^٢ + ٥س + جـ يقطع محور السينات عند س = ٢ ، عند س = ء فأوجد قيمتى جـ ، ء حيث ء عدد سالب



(٦)

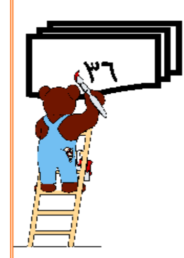


الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د(س) حيث

د(س) = م − س^٢ ، إذا كان ﻫ و = ٩ وحدات أوجد :

١) قيمة م　　　٢) احداثى ب ، جـ

٣) مساحة المثلث الذى رؤوسه ﻫ ، ب ، جـ



تمارين على الدوال كثيرات الحدود

(١) إذا كانت : د : ح ⟵ ح ، اذكر درجة د ثم أوجد د(−٢) ، د(٠) ، د(٠,٥) حيث :

❶ د(س) = ٣ ❷ د(س) = ٣ − ٢س ❸ د(س) = س٢ − ٤

(٢) إذا كانت د : د(س) = ٢س٢ − ٥س + ٢ ❶ اذكر درجة د ❷ اثبت أن : د(٢) = د($\frac{1}{2}$)

(٣) إذا كانت : د(س) = س٢ − ٣س ، ن(س) = س − ٣

❶ أوجد : د($\sqrt{2}$) + ٣ ن($\sqrt{2}$) ❷ اثبت أن : د(٣) = ن(٣) = صفر

(٤) إذا كانت : د : د(س) = س٢ − ٢س − ٥ اثبت أن : د(١ + $\sqrt{6}$) = د(١ − $\sqrt{6}$) = صفر

(٥) أكمل ما يأتى :

❶ الدالة د(س) = − ٥ دالة كثيرة حدود من الدرجة .... وتمثل بخط مستقيم يوازى محور ....

❷ إذا كانت : د(س) = ٣ فان د(٣) + د(−٣) = ...

❸ إذا كان د(س) = ٧ فان د(س٢) = ...

❹ د(س) = ٤ تمثل بيانيا بخط مستقيم يوازى محور .... ويقطع محور .... فى النقطة(..... ، ......)

❺ الدالة د(س) = س٣ − ٥س٢ − ٢ من الدرجة ....

❻ د(س) = ٢ فان د(س − ٢) = ...

❼ د(س) = س + ٣ هى دالة كثيرات حدود من الدرجة ....

❽ د(س) = س فان ٢ د(٥) − ٥ د(٢) = ...

❾ إذا كان د : س ⟵ ٣س فان صورة العنصر ٤ بالدالة د هى ....

❿ إذا كان د(س) = ٢س + ١ فان د(.....) = ٣

⓫ الدالة د(س) = س هى دالة من الدرجة .... وتمثل مستقيم يمر بالنقطة (−٣ ، ....)

⓬ إذا كان د(س) = ٥ فان $\frac{د(٥) − د(−٥)}{د(٣)}$ = ...

⓭ إذا كان : د : د(س) = أ س٢ − ٣س ، د(١) = ٧ فان أ = ...

⓮ إذا كان : د : د(س) = س٢ − أ ، د($\sqrt{5}$) = صفر فان أ = ...

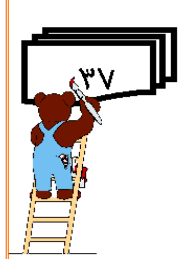
⓯ إذا كان لمنحنى الدالة التربيعية المعرفة على ح قيمة عظمى فان هذا المنحنى يكون مفتوحا لـ..........

⓰ معادلة خط التماثل لمنحنى الدالة د : د(س) = س٢ هى ....

⓱ عند تمثيل د(س) = أ س٢ + ب س + جـ حيث أ ∈ ح* فان الاحداثى السينى لرأس المنحنى = ...

⓲ نقطة رأس منحنى الدالة د : د(س) = ٢س٢ − ٤س + ٥ هى ....

⓳ إذا كانت : (−٢ ، ص) تنتمى لمنحنى الدالة د : د(س) = س٢ + ١ فان : ص = ...



(٦) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

❶ الدالة د : د(س) = س (س − ٣س^٢) هى دالة كثيرة حدود من الدرجة ....

① الأولى ② الثانية ③ الثالثة ④ الرابعة

❷ إذا كانت : د(س) = ٢ فإن ....:

① د(١) = $\frac{١}{٢}$ د(٢) ② د(١) > د(٢)

③ د(١) < د(٢) ④ د(١) = د(٢)

❸ الدالة د : د(س) = س^٢ (س − ٢)^٢ هى دالة كثيرة حدود من الدرجة ....

① الأولى ② الثانية ③ الثالثة ④ الرابعة

❹ إذا كانت : د(س) = ٧ فإن : د(٨) = ...

① ٧ ② صفر ③ ٨ ④ ٥٦

❺ إذا كانت : د(س) = ٢ فإن : ٣د($\sqrt{٢}$) = ...

① ٣$\sqrt{٢}$ ② ٦ ③ ٣ ④ ٢

❻ إذا كانت : د(س) = ٥ فإن : د(٣) − د(١) = ...

① د(٢) ② ٢ ③ صفر ④ ١٠

❼ الدالة د : د(س) = (س^٢ − ٣)^٢ هى دالة كثيرة حدود من الدرجة ....

① الأولى ② الثانية ③ الثالثة ④ الرابعة

❽ إذا كانت : د(س) = ٧ فإن : د(−س) = ...

① ٧ ② −٧ ③ $\frac{١}{٧}$ ④ −$\frac{١}{٧}$

❾ إذا كانت : د(س) = ٣ فإن : $\frac{٢د(٣)}{٣د(٢)}$ = ...

① $\frac{٣}{٢}$ ② $\frac{٢}{٣}$ ③ ١ ④ ٦

❿ إذا كانت : د(س) = أ س + ٦ ، د(٢) = ٢ فإن : أ = ...

① ٢ ② −٢ ③ ٤ ④ ٦

⓫ إذا كانت النقطة (٣ ، ٢) هى رأس منحنى الدالة التربيعية د فإن معادلة خط التماثل هى.........

① س = ٣ ② س = ٢ ③ ص = ٣ ④ ص = −٣

⓬ الشكل البيانى المقابل :

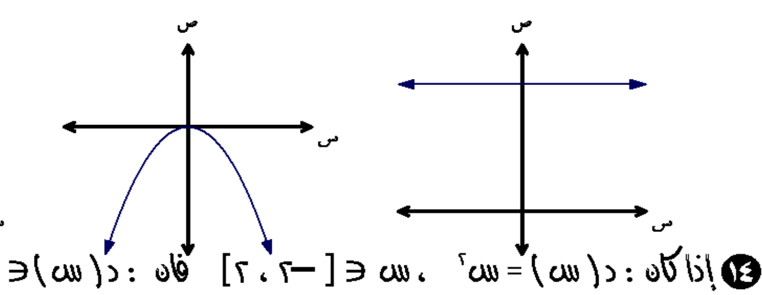
يمثل الدالة د حيث ....

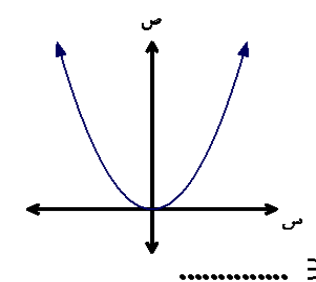
① د(س) = س^٢ + ٤ ② د(س) = −س^٢ + ٤

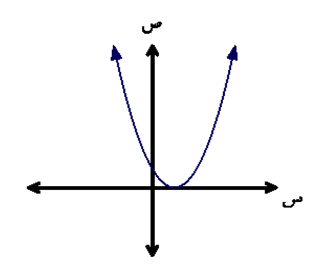
③ د(س) = −س^٢ − ٤ ④ د(س) = س^٢ − ٤

مع أرق تمنياتي بالنجاح والتفوق ...أ/وليد رشدى

⑬ الشكل البيانى للدالة د : د(س) = س² − ٢س + ١ هو الشكل رقم ....







⑭ إذا كان د : د(س) = س² ، س ∈ [−٢ ، ٢] فان : د(س) ∈ ....

①]٠ ، ٤] ②]٠ ، ٤[③ [٠ ، ٤] ④ [−٤ ، ٤]

(ب) أكمل ما يأتى :

❶ الدالة د : د(س) = س⁴ − ٢س² + ٧ هى دالة كثيرات حدود من الدرجة ....

❷ الدالة د : د(س) = س² −(س² − ٣) هى دالة كثيرات حدود من الدرجة ....

❸ الدالة د: ح ← ح حيث د(س) = ٥ يمثل خط مستقيم يوازى .... ويقطع محور الصادات فى النقطة ....

❹ محور السينات هو التمثيل البيانى للدالة د : ح ← ح حيث د(س) = ...

❺ إذا كانت : د(س) = ٣ فان : د(٥) + د(−٥) = ...

❻ إذا كانت النقطة (٢ ، أ) تقع على محور السينات فان : أ = ...

❼ إذا كانت الدالة د(س) = ٥ فان : د(٥) / د(١٠) = ...

❽ الدالة : د(س) = (س − ١) / س ليست كثيرة حدود بسبب ......

❾ الدالة الخطية المعرفة بالقاعدة د(س) = ٢س − ١ يمثلها بيانيا خط مستقيم يقطع محور الصادات فى النقطة ....

❿ الدالة الخطية المعرفة بالقاعدة د(س) = ٣س + ٦ يمثلها بيانيا خط مستقيم يقطع محور السينات فى النقطة ....

⓫ إذا كانت النقطة (أ ، ٣) تقع على الخط المستقيم الممثل للدالة د: ح ← ح حيث د(س) = ٤س − ٥ فان أ = ...

⓬ منحنى الدالة التربيعية يكون قيمة عظمى إذا كانت إشارة س² .... ويكون له قيمة صغرى إذا كانت إشارة معامل س² ......

⓭ المستقيم الممثل للدالة د : د(س) = س − ٥ يقطع محور السينات فى النقطة ....

⓮ إذا كانت د(س) = ٣س − ١ وكانت د(أ) = ٢٩ فان : أ = ...

الدرس الثانى

النسبة

والتناسب

النسبة

تعريف النسبة :

إذا كانت ﺃ ، ب كميتان قياسيتان من نفس النوع ولهما نفس وحدة القياس فأن النسبة بينهما وتكتب $\frac{ﺃ}{ب}$ أو ﺃ : ب أى أن : هى عدد مرات احتواء الكمية ﺃ من الكمية ب .

ملاحظات هامة

❶ فى النسبة $\frac{ﺃ}{ب}$ أو ﺃ : ب فأن ﺃ يسمى مقدم النسبة ، ب يسمى تالى النسبة و أيضا ﺃ ، ب هما حدى النسبة

❷ إذا ضرب حدى النسبة فى نفس المقدار الثابت أو قسم حدى النسبة على نفس المقدار الثابت (غير الصفر) فأن قيمة النسبة لا تتغير . أى أن $\frac{ﺃ}{ب} = \frac{ﺃ \times جـ}{ب \times جـ} = \frac{ﺃ \div جـ}{ب \div جـ}$

❸ إضافة أو طرح مقدار ثابت (غير الصفر) من حدى النسبة يغير من قيمة النسبة

أى أن : $\frac{ﺃ}{ب} \neq \frac{ﺃ \pm جـ}{ب \pm جـ}$ حيث جـ $\neq$ ٠

❹ إذا كانت $\frac{ﺃ}{ب} = \frac{جـ}{ء}$

فأن ﺃ = جـ ك ، ب = ء ك حيث ك $\neq$ صفر   أو   ﺃ = ب م ، جـ = ء م حيث م $\neq$ صفر.

إذا كانت $\frac{ﺃ}{ب} = \frac{جـ}{ء}$ فأن ﺃ × ء = ب × جـ

حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

❺ كذلك إذا كان $\frac{س}{٥} = \frac{ص}{٧}$ فأن س = ٥ ك ، ص = ٧ ك .

❻ إذا كان $\frac{ﺃ}{ب} = \frac{٥}{٧}$ فأن إحدى قيم ﺃ هى ٥ ، إحدى قيم ب هى ٧ .



تمارين محلولة على النسبة

✍ مثال [١]

إذا كان س − ١ : ٣س − ٤ = ١ : ٥ **احسب قيمة** س ؟

∴ $\frac{س - ١}{٣س - ٤} = \frac{١}{٥}$ ∴ ٥س − ٥ = ٣س − ٤ ∴ ٥س − ٣س = ٥ − ٤

∴ ٢س = ١ ∴ س = $\frac{١}{٢}$

✍ مثال [٢]

إذا كان $س^٢ - ٧$: $س^٢ - ٤$ = ٢ : ٥ **احسب قيمة** س ؟

∴ $\frac{س^٢ - ٧}{س^٢ - ٤} = \frac{٢}{٥}$ ∴ $٥س^٢ - ٣٥ = ٢س^٢ - ٨$ ∴ $٥س^٢ - ٢س^٢ = ٣٥ - ٨$

∴ $٣س^٢ = ٢٧$ ∴ $س^٢ = ٩$ ∴ س = ± ٣

✍ مثال [٣]

إذا كان $س^٢ + ١$: ٥س − ٢ = ٢ : ٣ **احسب قيمة** س ؟

∴ $\frac{س^٢ + ١}{٥س - ٢} = \frac{٢}{٣}$ ∴ $٣س^٢ + ٣ = ١٠س - ٤$ ∴ $٣س^٢ - ١٠س + ٣ + ٤ = ٠$

∴ $٣س^٢ - ١٠س + ٧ = ٠$ ∴ (٣س − ٧)(س − ١) = ٠

∴ ٣س − ٧ = ٠ ∴ ٣س = ٧ ∴ س = $\frac{٧}{٣}$

∴ س − ١ = ٠ ∴ س = ١

✍ مثال [٤]

ما العدد الذى إذا طرح من مقدم النسبة ٥ : ٩ وأضيف إلى تاليها أصبحت ٢ : ١١ ؟

$\frac{٥ - س}{٩ + س} = \frac{٢}{١١}$

∴ ١٨ + ٢س = ٥٥ − ١١س ∴ ١١س + ٢س = ٥٥ − ١٨

∴ ١٣س = ٣٧ ∴ س = $\frac{٣٧}{١٣}$ ∴ العدد هو $\frac{٣٧}{١٣}$

مع أرق تمنياتي بالنجاح والتفوق ... أ/ وليد رشدي



مثال [٥]

ما العدد الموجب الذى إذا طرح مربعه من حدى النسبة ٤١ : ٩١ لتكون مساوية للمعكوس الضربى للعدد ٣ ؟

$\frac{٤١ - س^٢}{٩١ - س^٢} = \frac{١}{٣}$ ∴ $٩١ - س^٢ = ٣(٤١ - س^٢)$

∴ $٩١ - س^٢ = ١٢٣ - ٣س^٢$ ∴ $٣س^٢ - س^٢ = ١٢٣ - ٩١$

∴ $٢س^٢ = ٣٢$ ∴ $س^٢ = ١٦$ ∴ $س = \pm ٤$ $س = ٤$ العدد هو ٤

مثال [٦]

ما العدد الموجب الذى إذا طرح من مقدم النسبة ١٣ : ١٥ و أضيف مربعه إلى تاليها أصبحت مساوية لنسبة ١ : ٥ ؟

$\frac{١٣ - س}{١٥ + س^٢} = \frac{١}{٥}$ ∴ $١٥ + س^٢ = ٦٥ - ٥س$ ∴ $س^٢ + ٥س + ١٥ - ٦٥ = ٠$

∴ $س^٢ + ٥س - ٥٠ = ٠$ ∴ $(س - ٥)(س + ١٠) = ٠$

∴ $س = ٥$ ، ∴ $س = -١٠$ مرفوض

مثال [٧]

عددان موجبان النسبة بينهما ٤ : ٥ وثلاثة أمثال أصغرهما يزيد عن ضعف أكبرهما بمقدار ٦ اوجد العددان

نفرض أن الأصغر = ٤س ، الأكبر = ٥س

∴ $٣(٤س) - ٢(٥س) = ٦$ ∴ $١٢س - ١٠س = ٦$

∴ $٢س = ٦$ ∴ $س = ٣$

الأول ٤س = ٤ × ٣ = ١٢ ∴ الثانى = ٥س = ٥ × ٣ = ١٥

مثال [٨]

عددان موجبان النسبة بينهما ٢ : ٣ و مجموع مربعيهما = ١١٧ اوجد العددان

نفرض أن الأصغر ٢س ، الأكبر ٣س

∴ $(٢س)^٢ + (٣س)^٢ = ١١٧$

∴ $٤س^٢ + ٩س^٢ = ١١٧$ ∴ $١٣س^٢ = ١١٧$ ∴ $س^٢ = \frac{١١٧}{١٣}$

∴ $س^٢ = ٩$ ∴ $س = ٣$

الأصغر = ٢س = ٢ × ٣ = ٦ ، الأكبر ٣س = ٣ × ٣ = ٩

مع أرق تمنياتي بالنجاح والتفوق ... أ/ وليد رشدي

مثال [٩]

عددان موجبان النسبة بينهما ٣ : ٢ مربع أصغرهما يزيد عن ثلاثة أمثال أكبرهما بمقدار ٢٨ اوجد العددان

نفرض أن الأصغر ٢ س ، الأكبر ٣ س

∴ (٢س)² − ٣(٣س) = ٢٨ ∴ ٤ س² − ٩ س − ٢٨ = ٠ ∴ (س − ٤)(٤س + ٧) = ٠

∴ إما س = ٤ ∴ إما ٤س + ٧ = ٠ ∴ ٤س = −٧ ∴ س = $\frac{-٧}{٤}$

الأول ٣س = ٤ × ٣ = ١٢ الثانى = ٢ س = ٤ × ٢ = ٨

مثال [١٠]

عددان صحيحان موجبان النسبة بينهما ٢ : ٥ و ضعف مربع أصغرهما ينقص عن سبعة أمثال أكبرهما بمقدار ٣٣ اوجد العددان

الحل نفرض أن الأصغر ٢ س ، الأكبر ٥س

∴ ٧ (٥س) − ٢(٢س)² = ٣٣ ∴ −٢(٤س²) + ٣٥ س − ٣٣ = ٠

∴ −٨س² + ٣٥ س − ٣٣ = ٠ ∴ ٨س² − ٣٥س + ٣٣ = ٠ ∴ (س − ٣)(٨س − ١١) = ٠

∴ إما س = ٣ إما ٨س − ١١ = ٠ ∴ ٨س = ١١ ∴ س = $\frac{١١}{٨}$ مرفوض

الأول ٢س = ٢ × ٣ = ٦ الثانى = ٥ س = ٥ × ٣ = ١٥

مثال [١١]

إذا كانت النسبة بين مساحة مستطيل طوله (س + ٣) و عرضه (س − ٢) ومساحة مستطيل أخر طوله (س + ٥) ، عرضه (س − ٢) كنسبة $\frac{٩}{١١}$ اوجد قيمة س

الحل

$\frac{\text{مساحة المستطيل الاول}}{\text{مساحة المستطل الثانى}}$ = $\frac{٩}{١١}$ ∴ $\frac{(س + ٣)(س − ٢)}{(س + ٥)(س − ٢)}$ = $\frac{٩}{١١}$

∴ $\frac{س + ٣}{س + ٥}$ = $\frac{٩}{١١}$ ∴ ١١س + ٣٣ = ٩س + ٤٥

∴ ١١س − ٩س = −٣٣ + ٤٥

∴ ٢س = ١٢ ∴ س = ٦



تمارين على النسبة

[١] اكمل ما يأتى :

❶ إذا كان : $\frac{٥}{س} = \frac{١٠}{٣}$ فأن س = ...

❷ إذا كان : $\frac{س + ٣}{س} = \frac{٢}{٣}$ فأن س = ...

❸ إذا كان : $\frac{٣}{س} = \frac{س}{٢٧}$ فأن س = ...

❹ إذا كان : $\frac{\sqrt{س}}{٥} = \frac{\sqrt{٥}}{س}$ فأن س = ...

❺ إذا كانت النسبة بين عددين هى ٢ : ٣ وكان العدد الأول هو ٢م حيث م ∋ ح فأن العدد الثانى هو ....

❻ قيمة النسبة .... إذا ضرب حداها أو قسم حداها على عدد حقيقى لا يساوى صفر

❼ العدد الذى يضاف إلى حدى النسبة ٣ : ٢ لكى تصبح $\frac{٥}{٧}$ هو ....

❽ نادى للكمبيوتر عدد أعضائه ٦٠ عضوا وكان ٤٠ ٪ من الأعضاء بنات ، أنضم بعد ذلك ٢٠ ولدا للنادى فأن النسبة المئوية للبنات تكون ....

❾ النسبة بين حجم مكعب طول حرفه ٦سم ، حجم متوازى مستطيلات أبعاده ٣سم ، ٦سم ، ٨سم هى...... : ......

❿ قسم مبلغ بين شخصين بنسبة ٢ : ٣ فإذا كان نصيب أولهما ٣٠ جنيها فأن نصيب الثانى هو ....

⓫ $\frac{٣}{٤} = \frac{١٥}{..........}$

⓬ $\frac{٥}{٢}$ س : $\frac{٧}{٣}$ س = ... : ١٤

⓭ ٨٤ جـ : ٣٥ جـ = ... : ٥

⓮ ١٢ $أ^٢$ ب : ١٥ $أ^٢$ ب = ٤ أ : ....

⓯ ٩٠ أ : ١٠٨ أ = ٥ : ....

⓰ ١٢ : .... = ٤ : ٥

⓱ (٤ $س^٢$ − ٩ $ص^٢$) : .... = (٢س − ٣ص) : (٢س + ٣ص)

⓲ ($أ^٢$ + أ) : (أ + ١) = أ : ....

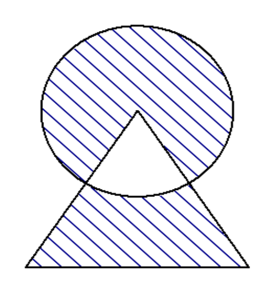
⓳ ($س^٢$ − $ص^٢$) : $(س − ص)^٢$ = (س + ص) : ......

⓴ ٣ جنيهات : ٢٤٤ قرش = ... : ......

㉑ ٢٢٥سم : ٣متر = ... : ....

㉒ قامت آلاء بتظليل $\frac{٥}{٦}$ مساحة سطح الدائرة ، $\frac{٢}{٣}$ مساحة سطح المثلث

فأن النسبة بين مساحة سطح الدائرة : مساحة سطح المثلث = ... : ....





[٢] اختر الإجابة الصحيحة من كل مما يأتى :

❶ إذا كان : $\frac{س + ١}{س} = \frac{٣}{٢}$ فأن س = ...

① ٤ ② ٣ ③ ٢ ④ −٢

❷ إذا كان : $\frac{س - ١}{س - ٢} = \frac{١}{٢}$ فأن س = ...

① $\frac{١}{٤}$ ② $-\frac{١}{٤}$ ③ $-\frac{٤}{٥}$ ④ $\pm\frac{١}{٤}$

❸ إذا كان : $\frac{أ - ١}{٢} = \frac{٥}{٢}$ فأن $\frac{١}{٢}$ أ = ...

① −١ ② ٣ ③ ٤ ④ −٢

❹ إذا كان : $\frac{س}{٤} = \frac{١٦}{س}$ فأن س = ...

① $\pm$ ٤ ② ٨ ③ $\pm$ ٨ ④ ٤

❺ إذا كان : $\frac{أ}{جـ} = \frac{جـ}{٣} = ٣$ فان أ = ...

① ٣ ② ٩ ③ ٢٧ ④ ١

❻ مستطيل النسبة بين طوله وعرضه كنسبة ٣ : ٢ ومساحته ٩٦سم٢ فأن محيطه ....سم

① ٢٠ ② ٤٠ ③ ٣٠ ④ ٤٥

❼ العدد الذى إذا طرح من حدى النسبة $\frac{٥}{٦}$ لكى تصبح $\frac{٣}{٢}$ هو ....

① ٢ ② ١ ③ ٨ ④ −٢

❽ العدد الموجب الذى إذا طرح مربعة من حدى النسبة $\frac{٩}{١٤}$ فأنها تصبح $\frac{١}{٢}$ هو ....

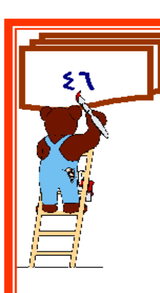
① ٢ ② ٣ ③ ٤ ④ ٥

[٣] إذا كان (٤س −٣) : (٢س + ١) = ٥: ٣ فأوجد قيمة س

[٤] إذا كان (٢س − ٣) : (س − ٥) = ٤ : ١ فأوجد قيمة س

[٥] إذا كان (٢٩ − س٢) : (٤٦ − س٢) = ٣ : ٢ ، س ∈ ح+ فأوجد قيمة س

مع أرق تمنياتي بالنجاح والتفوق ... أ/ وليد رشدي



✍ [٦] إذا كان (س٢ + ١٠ س) : (٢س٢ − ٣) = ٢٤ : ٥ ، س ∈ ص+ فأوجد قيمة س

✍ [٧] إذا كان (٢س + ١٣) : (٣س٢ + ١) = ٣ : ٧ فاحسب قيمة س

✍ [٨] أوجد عددان نسبيان نسبة أحدهما إلى الآخر كنسبة ٧ : ١٢ وأحدهما يزيد عن الآخر بمقدار ٢٧٥

✍ [٩] أوجد العدد الحقيقى الذى إذا أضيف إلى حدى النسبة ٥ : ٣٧ تصبح ١ : ٣

✍ [١٠] أوجد العدد الحقيقى الذى إذا أضيف إلى حدى النسبة ٢ : ٥ تصبح ٢ : ٣

✍ [١١] ما العدد الموجب الذى إذا أضيف مربعة إلى حدى النسبة $\frac{٢١}{١١}$ فأنها تصبح $\frac{٧}{٦}$

✍ [١٢] ما العدد الموجب الذى إذا أضيف مربعة إلى حدى النسبة ٥ : ١١ فأنها تصبح ٥ : ٦

✍ [١٣] عددان نسبيان النسبة بينهما ٣ : ٤ ، وإذا أضيف إلى العدد الأول ١٠ وطرح من الثانى ٥ صارت النسبة بينهما ٥ : ٣ أوجد العددان .

✍ [١٤] عددان موجبان النسبة ى بينهما ٤ : ٥ وثلاثة أمثال أصغرهما يزيد عن ضعف أكبرهما بمقدار ٦ أوجد العددان .

✍ [١٥] ما العدد الذى إذا أضيف إلى مقدم النسبة ١٥ : ١١ وطرح من تاليها فأنها تصبح ٩ : ٤

✍ [١٦] مستطيل النسبة بين بعديه ٣ : ٧ ومساحته ١٨٩سم٢ أوجد محيطه .

✍ [١٧] مستطيلان بعداهما (س + ٣) ، (س + ١) وحدة طول ، بعدا الآخر (س + ٥) ، (س + ٢) وحدة طول والنسبة بين مساحتيهما ١٥ : ٢٨ أوجد قيمة س

✍ [١٨] إذا كان نسبة عدد العروض المسرحية فى شهر ما فى مدينة القاهرة إلى العروض المسرحية فى نفس الشهر لمدينة الإسكندرية ٩ : ٧ وإذا نقص عدد العروض المسرحية بالقاهرة بمقدار ٣٠ عرض وزاد عدد العروض المسرحية بالإسكندرية ١٠ عروض فى الشهر التالى لحلول فصل الصيف كانت النسبة بين عدد العروض فى القاهرة و الإسكندرية كنسبة ٦ : ٥ أوجد عدد العروض فى كل من القاهرة و الإسكندرية فى الشهر الأول .

✍ [١٩] قطعة من السلك طولها ١٥٢سم قسمت إلى جزأين النسبة بينهما كنسبة ١١ : ٨ ، وصنع من الجزء الأكبر دائرة ومن الجزء الأصغر مربع على الترتيب .أوجد النسبة بين مساحة المربع ومساحة الدائرة . (π = $\frac{٢٢}{٧}$)

✍ [٢٠] أوجد العدد الموجب الذى إذا أضيف معكوسة الضربى إلى تالى النسبة $\frac{٢}{٣}$ أصبحت $\frac{٣}{٥}$

مع أرق تمنياتي بالنجاح والتفوق ... أ/ وليد رشدي



هو تساوى نسبتين أو أكثر أى أن : $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ يسمى تناسب

أ الأول المتناسب , ب الثانى المتناسب , جـ الثالث المتناسب , د الرابع المتناسب

أ ، د يسميان طرفى التناسب , جـ ، ب يسميان وسطى التناسب

تـذكـر أن :

❶ أ , ب , جـ , د متناسبة $\Leftrightarrow \frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$

❷ $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د} \Leftrightarrow \frac{ب}{أ} = \frac{د}{جـ}$ و $\frac{أ}{جـ} = \frac{ب}{د}$

❸ إذا كان أ د = ب جـ $\Leftrightarrow \frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ أو $\frac{أ}{جـ} = \frac{ب}{د}$

❹ إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د} = \frac{هـ}{و} = م$ فأن أ = ب م ، جـ = د م ، هـ = و م

حيث م ثابت لا يساو الصفر

تمارين محلولة على التناسب

✍ مثال [١]

أوجد الثانى المتناسب فيما يلى ١٥ ، ٥ ، ٦

بفرض أن الثانى المتناسب هو س ١٥ ، س ، ٥ ، ٦ فى تناسب $\therefore \frac{١٥}{س} = \frac{٥}{٦}$

$\therefore ٥س = ٩٠$ $\therefore س = \frac{٩٠}{٥} = ١٨$

✍ مثال [٢]

أوجد الرابع المتناسب للأعداد ٢ ، ٥ ، ٦

نفرض أن الرابع المتناسب هو س ∴ ٢ ، ٥ ، ٦ ، س فى تناسب

$\therefore \frac{٢}{٥} = \frac{٦}{س}$ ∴ ٢س = ٣٠ ∴ س = ١٥ ∴ الرابع المتناسب هو ١٥

مع أرق تمنياتي بالنجاح والتفوق ... أ/ وليد رشدي

مثال [٣]

أوجد قيمة س التى تجعل ما يلى فى تناسب : ٣ ، ٦ ، ٧ ، س

∴ $\frac{٣}{٦} = \frac{٧}{س}$ أن ∴ ٣س = ٤٢ ∴ س = $\frac{٤٢}{٣}$

مثال [٤]

أوجد الرابع المتناسب لما يلى س + ١ ، س٢ – ١ ، س – ١

الحل بفرض أن الرابع المتناسب هو م ∴ س + ١ ، س٢ – ١ ، س – ١ ، م فى تناسب

∴ $\frac{س + ١}{س^٢ - ١} = \frac{س - ١}{م}$ ∴ م(س + ١) = (س – ١)(س٢ – ١)

∴ م = $\frac{(س - ١)(س^٢ - ١)}{(س + ١)}$ ∴ م = $\frac{(س - ١)(س - ١)(س + ١)}{(س + ١)}$ = (س – ١)(س – ١) = س٢ – ٢س + ١

مثال [٥]

أوجد العدد الذى يضاف لكل من ٧ ، ٩ ، ١٣ ، ١٦ فتصبح كميات متناسبة

∴ $\frac{(٧ + س)}{(٩ + س)} = \frac{(١٣ + س)}{(١٦ + س)}$ ∴ (٧ + س)(١٦ + س) = (٩ + س)(١٣ + س)

∴ ١١٢ + ٢٣ س + س٢ = ١١٧ + ٢٢ س + س٢

∴ ١١٢ + ٢٣ س = ١١٧ + ٢٢ س ∴ ٢٣ س – ٢٢ س = ١١٧ – ١١٢

∴ س = ٥

مثال [٦]

إذا كان ٢م – ٥ ب = $\frac{٣ب + ٢م}{٣}$ **فاثبت أن** : ٢م – ٩ب = صفر

∵ ٢م – ٥ب = $\frac{٣ب + ٢م}{٣}$ ∴ ٦م – ١٥ ب = ٣ب + ٢م

∴ ٦م – ٢ م = ١٥ب + ٣ب ∴ ٤ م = ١٨ب

∴ ٢م = ٩ ب ∴ ٢م – ٩ب = ٠

✍ مثال [٧]

إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{٢}{٣}$ **فأوجد القيمة العددية للمقدار** $\frac{٣ب^٢ - أب}{٢أب - أ^٢}$

بفرض أن أ = ٢م ، ب = ٣م حيث م ≠ صفر

$$∴ المقدار = \frac{٣ب^٢ - أب}{٢أب - أ^٢} = \frac{٣(٣م)^٢ - ٢م(٣م)}{٢(٢م)(٣م) - (٢م)^٢} = \frac{٣(٩م^٢) - ٦م^٢}{١٢م^٢ - ٤م^٢} = \frac{٢٧م^٢ - ٦م^٢}{١٢م^٢ - ٤م^٢} = \frac{٢١م^٢}{٨م^٢} = \frac{٢١}{٨}$$

✍ مثال [٨]

إذا كان $أ = \frac{ب}{٢}$ **فأوجد القيمة العددية للمقدار** $\frac{٣أب + ب^٢}{١١أ^٢ - ٥أب}$

بفرض أن أ = م ، ب = ٢م

$$\frac{٣أب + ب^٢}{١١أ^٢ - ٥أب} = \frac{٣م(٢م) + (٢م)^٢}{١١م^٢ - ٥م(٢م)} = \frac{٦م^٢ + ٤م^٢}{١١م^٢ - ١٠م^٢} = \frac{١٠م^٢}{م^٢} = ١٠$$

✍ مثال [٩]

إذا كان $\frac{٣س}{٧ص} = ١$ **فأوجد القيمة العددية للمقدار** $\frac{س^٢ - ٢س ص}{ص^٢}$

$\frac{٣س}{٧ص} = ١$ ٣س = ٧ص $\frac{س}{ص} = \frac{٧}{٣}$

بفرض أن س = ٧م ، ص = ٣م

$$\frac{س^٢ - ٢س ص}{ص^٢} = \frac{(٧م)^٢ - ٢(٧م)(٣م)}{(٣م)^٢} = \frac{٤٩م^٢ - ٤٢م^٢}{٩م^٢} = \frac{٧م^٢}{٩م^٢} = \frac{٧}{٩}$$

✍ مثال [١٠]

إذا كان ٣أ − ٥ب = صفر **فأوجد القيمة العددية للمقدار** $\frac{٥أ - ٦ب}{٢أ + ٣ب}$

٣أ − ٥ب = صفر   ٣أ = ٥ب $\frac{أ}{ب} = \frac{٥}{٣}$ بفرض أن أ = ٥م ، ب = ٣م

$$\frac{٥أ - ٦ب}{٢أ + ٣ب} = \frac{٥(٥م) - ٦(٣م)}{٢(٥م) + ٣(٣م)} = \frac{٢٥م - ١٨م}{١٠م + ٩م} = \frac{٧م}{١٩م} = \frac{٧}{١٩}$$

✍ مثال [١١]

إذا كان $\frac{أ}{٣} = \frac{ب}{٢} = \frac{ج}{٧}$ **فأوجد القيمة العددية للمقدار** $\frac{٥أ + ٣ب - ٢ج}{٤أ + ٣ب + ج}$

أ = ٣م ، ب = ٢م ، ج = ٧م

$$\frac{٥أ + ٣ب - ٢ج}{٤أ + ٣ب + ج} = \frac{٥(٣م) + ٣(٢م) - ٢(٧م)}{٤(٣م) + ٣(٢م) + ٧م} = \frac{١٥م + ٦م - ١٤م}{١٢م + ٦م + ٧م} = \frac{٧م}{٢٥م} = \frac{٧}{٢٥}$$

✍ مثال [١٢]

إذا كان أ : ب : ج = ١ : ٢ : ٣ **فأوجد القيمة العددية للمقدار** $\frac{أ^٢ + ب ج + أ ج}{ب^٢ + ج^٢}$

أ : ب : ج = ١ : ٢ : ٣

بفرض أن أ = م ، ب = ٢م ، ج = ٣م

$$\frac{أ^٢ + ب ج + أ ج}{ب^٢ + ج^٢} = \frac{م^٢ + (٢م)(٣م) + م(٣م)}{(٢م)^٢ + (٣م)^٢} = \frac{م^٢ + ٦م^٢ + ٣م^٢}{٤م^٢ + ٩م^٢} = \frac{١٠م^٢}{١٣م^٢} = \frac{١٠}{١٣}$$

✍ مثال [١٣]

إذا كان $س = \frac{ص}{٥} = ع$ **فأوجد القيمة العددية للمقدار** $\frac{٣س ص + ٢س ع + ٤ص ع}{س^٢ + ص^٢ - س ع}$

$س = \frac{ص}{٥} = ع$ بفرض أن س = م ، ص = ٥م ، ع = م

$$\frac{٣س ص + ٢س ع + ٤ص ع}{س^٢ + ص^٢ - س ع} = \frac{٣م(٥م) + ٢م(م) + ٤(٥م)(م)}{م^٢ + (٥م)^٢ - م(م)} = \frac{١٥م^٢ + ٢م^٢ + ٢٠م^٢}{م^٢ + ٤م^٢ - م^٢} = \frac{٣٧م^٢}{٤م^٢} = \frac{٣٧}{٤}$$

✍ مثال [١٤]

إذا كان ٢أ = ٣ب = ج **فاحسب قيمة** $\frac{٣أ - ٢ج + ٥ب}{٤أ + ٥ج}$

٢أ = ٣ب = ج   بالقسمة ÷ ٦ لجميع الأطراف $\therefore \frac{أ}{٣} = \frac{ب}{٢} = \frac{ج}{٦}$

أ = ٣م ، ب = ٢م ، ج = ٦م

$$\frac{٣أ - ٢ج + ٥ب}{٤أ + ٥ج} = \frac{٣(٣م) - ٢(٦م) + ٥(٢م)}{٤(٣م) + ٥(٦م)} = \frac{٩م - ١٢م + ١٠م}{١٢م + ٣٠م} = \frac{٧م}{٤٢م} = \frac{١}{٦}$$

✍ مثال [١٥]

إذا كان $\frac{س}{٥} = \frac{ص}{٢} = \frac{ع}{٣}$ فاثبت أن $\frac{س + ص}{٧} = \frac{ص + ع}{٥} = \frac{س + ٣ع}{١٤}$

$\frac{س}{٥} = \frac{ص}{٢} = \frac{ع}{٣}$ س = ٥م ، ص = ٢ م ، ع = ٣ م

الأيمن = $\frac{س + ص}{٧} = \frac{٥م + ٢ م}{٧} = \frac{٧م}{٧} = م$ ∵ الأوسط = $\frac{ص + ع}{٥} = \frac{٢م + ٣م}{٥} = \frac{٥م}{٥} = م$

الأيسر = $\frac{س + ٣ع}{١٤} = \frac{٥ م + ٣(٣م)}{١٤} = \frac{٥م + ٩ م}{١٤م} = \frac{١٤م}{١٤م} = م$

الأيمن = الأوسط = الأيسر $\frac{س + ص}{٧} = \frac{ص + ع}{٥} = \frac{س + ٣ع}{١٤}$

✍ مثال [١٦]

إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{١}{٢}$ ، $\frac{جـ}{٣} = \frac{ء}{٥}$ فاحسب قيمة $\frac{٢ أ ب + ٣ جـ ء}{ب^٢ + ٥ جـ^٢}$

$\frac{أ}{ب} = \frac{١}{٢}$ ، $\frac{جـ}{٣} = \frac{ء}{٥}$

أ = م ، ب = ٢م جـ = ٣ك ، ء = ٥ ك

$\frac{٢ أ ب + ٣ جـ ء}{ب^٢ + ٥ جـ^٢} = \frac{٢م(٢م) + ٣(٣ك)(٥ك)}{(٢م)^٢ + ٥ (٣ك)^٢} = \frac{٤م^٢ + ٤٥ك^٢}{٤م^٢ + ٤٥ك^٢} = ١$

✍ مثال [١٧]

إذا كان س : ص = ٣ : ٤ ، ع = $\frac{ل}{٣}$ فاحسب قيمة $\frac{٢س ل - ٣ص ع}{٥س ع + ٤ ص ل}$

∵ س : ص = ٣ : ٤ ، ع = $\frac{ل}{٣}$

س = ٣م ، ص = ٤ م ، ع = ك ، ل = ٣ك

$\frac{٢س ل - ٣ص ع}{٥س ع + ٤ ص ل} = \frac{٢(٣ م)(٣ك) - ٣(٤م)(ك)}{٥(٣م)(ك) + ٤(٤م)(٣ك)} = \frac{١٨م ك - ١٢م ك}{١٥ م ك + ٤٨ م ك} = \frac{٦م ك}{٦٣ م ك} = \frac{٢}{٢١}$

مع أرق تمنياتي بالنجاح والتفوق ... أ/ وليد رشدي

مثال [١٨]

إذا كان أ : ب = ٢ : ٧ ، ٣س − ٥ص = ٠ فاحسب قيمة $\dfrac{\text{أ س} + \text{٣ب ص}}{\text{أ ص} + \text{٥ ب س}}$

أ : ب = ٢ : ٧ ∴ أ = ٢م ، ب = ٧م

، ٣س − ٥ص = ٠ ، ٣س = ٥ص ، $\dfrac{\text{س}}{\text{ص}} = \dfrac{\text{٥}}{\text{٣}}$ ∴ س = ٥ك ، ص = ٣ك

$$\dfrac{\text{أ س} + \text{٣ب ص}}{\text{أ ص} + \text{٥ ب س}} = \dfrac{\text{٢م(٥ك)} + \text{٣(٧م)(٣ك)}}{\text{٢م(٣ك)} + \text{٥(٧م)(٥ك)}} = \dfrac{\text{١٠مك} + \text{٦٣مك}}{\text{٦مك} + \text{١٧٥مك}} = \dfrac{\text{٧٣مك}}{\text{١٨١مك}} = \dfrac{\text{٧٣}}{\text{١٨١}}$$

مثال [١٩]

إذا كان $\dfrac{\text{٣أ}}{\text{٢ب}} = \text{١}$ ، $\dfrac{\text{٢جـ}}{\text{٥ء}} = \dfrac{\text{١}}{\text{٢}}$ فاحسب قيمة $\dfrac{\text{٣أجـ} - \text{٢بء}}{\text{٥أء} + \text{ب جـ}}$

$\dfrac{\text{٣أ}}{\text{٢ب}} = \text{١}$ ∴ ٣أ = ٢ب ∴ $\dfrac{\text{أ}}{\text{ب}} = \dfrac{\text{٢}}{\text{٣}}$ ∴ أ = ٢م ، ب = ٣م

، $\dfrac{\text{٢جـ}}{\text{٥ء}} = \dfrac{\text{١}}{\text{٢}}$ ، ٤جـ = ٥ء ، $\dfrac{\text{جـ}}{\text{ء}} = \dfrac{\text{٥}}{\text{٤}}$ ∴ جـ = ٥ك ، ء = ٤ك

$$\dfrac{\text{٣أجـ} - \text{٢بء}}{\text{٥أء} + \text{ب جـ}} = \dfrac{\text{٣(٢م)(٥ك)} - \text{٢(٣م)(٤ك)}}{\text{٥(٢م)(٤ك)} + \text{٣م(٥ك)}} = \dfrac{\text{٣٠مك} - \text{٢٤مك}}{\text{٤٠مك} + \text{١٥مك}} = \dfrac{\text{٦مك}}{\text{٥٥مك}} = \dfrac{\text{٦}}{\text{٥٥}}$$

مثال [٢٠]

إذا كان أ : ب = ٢ : ٣ ، ب : جـ = ٤ : ٥ فاحسب قيمة $\dfrac{\text{أ} + \text{٤ب}}{\text{٣ب} - \text{جـ}}$

أ : ب = ٢ : ٣ ، ب : جـ = ٤ : ٥

أ	ب	جـ
٢	٣	—
—	٤	٥
٨	١٢	١٥

∴ أ = ٨م ، ب = ١٢م ، جـ = ١٥م

$$\dfrac{\text{أ} + \text{٤ب}}{\text{٣ب} - \text{جـ}} = \dfrac{\text{٨م} + \text{٤(١٢م)}}{\text{٣(١٢م)} - \text{١٥م}} = \dfrac{\text{٨م} + \text{٤٨م}}{\text{٣٦م} - \text{١٥م}} = \dfrac{\text{٥٦م}}{\text{٢١م}} = \dfrac{\text{٨}}{\text{٣}}$$

✍ مثال [٢١]

إذا كان أ : ب = ٥ : ٢ ، ب : جـ = ٣ : ٧ **وكانت** أ + ب + جـ = ٢١٠ **احسب قيمة كلا من** أ ، ب ، جـ

أ : ب = ٥ : ٢ ، ب : جـ = ٣ : ٧

أ	:	ب	:	جـ
٥		٢		—
—		٣		٧
١٥		٦		١٤

∴ أ = ١٥م ، ب = ٦م ، جـ = ١٤م

أ + ب + جـ = ٢١٠ ∴ ١٥م + ٦م + ١٤م = ٢١٠

∴ ٣٥م = ٢١٠ ∴ م = $\frac{٢١٠}{٣٥}$ = ٦

أ = ١٥م = ١٥ × ٦ = ٩٠ ، ب = ٦م = ٦ × ٦ = ٣٦

جـ = ١٤م = ١٤ × ٦ = ٨٤

✍ مثال [٢٢]

إذا كان $\frac{أ + ٣ب}{٣أ - ٥ب} = \frac{٢}{٣}$ **فاحسب قيمة** $\frac{٣أ - ٤ب}{٢أ + ٣ب}$

$\frac{أ + ٣ب}{٣أ - ٥ب} = \frac{٢}{٣}$ ٦أ + ٨ب = ٣أ + ٩ب ٦أ − ٣أ = ٩ب − ٨ب

٣أ = ب $\frac{أ}{ب} = \frac{١}{٣}$ ∴ أ = م ، ب = ٣م

$\frac{٣أ - ٤ب}{٢أ + ٣ب} = \frac{٣م - ٤(٣م)}{٢م + ٣(٣م)} = \frac{٣م - ١٢م}{٢م + ٩م} = \frac{-٩م}{١١م} = -\frac{٩}{١١}$

✍ مثال [٢٣]

إذا كانت س ، ص ∈ ح$^+$ **اوجد** س : ص **إذا كانت** ٤س^٢ − ٢٥ص^٢ = ٠

٤س^٢ − ٢٥ص^٢ = ٠ ٤س^٢ = ٢٥ص^٢

بأخذ الجذر التربيعي الموجب للطرفين لأن س ، ص ∈ ح$^+$

٢س = ٥ص $\frac{س}{ص} = \frac{٥}{٢}$ س : ص = ٥ : ٢

مع أرق تمنياتي بالنجاح والتفوق ... أ/ وليد رشدي

✍ مثال [٢٤]

إذا كانت س ، ص ∋ ع⁺ أوجد س : ص إذا كانت $\text{١٦س}^{٢} + \text{٤٩ص}^{٢} = \text{٥٦س ص}$

$\text{١٦س}^{٢} + \text{٤٩ص}^{٢} = \text{٥٦س ص}$ $\qquad$ $\text{١٦س}^{٢} - \text{٥٦س ص} + \text{٤٩ص}^{٢} = \text{٠}$

$(\text{٤س} - \text{٧ص})^{٢} = \text{٠}$ $\qquad$ ∴ ٤س − ٧ص = ٠ $\qquad$ ∴ ٤س = ٧ص

$$\therefore \frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{\text{٧}}{\text{٤}} \qquad \therefore \text{س : ص = ٧ : ٤}$$

✍ مثال [٢٥]

إذا كانت س ، ص ∋ ع⁺ أوجد س : ص إذا كانت $\text{٨س}^{٣} - \text{١٢٥ص}^{٣} = \text{٠}$

$\because \text{٨س}^{٣} - \text{١٢٥ص}^{٣} = \text{٠}$ $\qquad$ $\therefore \text{٨س}^{٣} = \text{١٢٥ص}^{٣}$ بأخذ الجذر التكعيبى للطرفين

$$\therefore \text{٢س} = \text{٥ص} \qquad \therefore \frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{\text{٥}}{\text{٢}}$$

✍ مثال [٢٦]

إذا كان أ ، ب ، جـ ، ء كميات متناسبة برهن أن : $\dfrac{\text{٧ أ} - \text{٤جـ}}{\text{٢أ} + \text{٣جـ}} = \dfrac{\text{٧ ب} - \text{٤ء}}{\text{٢ب} + \text{٣ء}}$

إذا كان أ ، ب ، جـ ، ء كميات متناسبة $\qquad$ $\dfrac{\text{أ}}{\text{ب}} = \dfrac{\text{جـ}}{\text{ء}} = \text{م}$ $\qquad$ ∴ أ = ب م ، جـ = ء م

$$\text{الأيمن} = \frac{\text{٧ أ} - \text{٤جـ}}{\text{٢أ} + \text{٣جـ}} = \frac{\text{٧ ب م} - \text{٤ء م}}{\text{٢ب م} + \text{٣ء م}} = \frac{\text{م (٧ ب} - \text{٤ء)}}{\text{م (٢ب} + \text{٣ء)}} = \frac{\text{٧ ب} - \text{٤ء}}{\text{٢ب} + \text{٣ء}} = \text{الأيسر}$$

∴ الطرفان متساويان

✍ مثال [٢٧]

إذا كان أ ، ب ، جـ ، ء كميات متناسبة برهن أن : $\dfrac{\text{أ} + \text{ب}}{\text{ب}} = \dfrac{\text{جـ} + \text{ء}}{\text{ء}}$

إذا كان أ ، ب ، جـ ، ء كميات متناسبة $\qquad$ $\dfrac{\text{أ}}{\text{ب}} = \dfrac{\text{جـ}}{\text{ء}} = \text{م}$ $\qquad$ ∴ أ = ب م ، جـ = ء م

$$\text{الأيمن} = \frac{\text{أ} + \text{ب}}{\text{ب}} = \frac{\text{ب م} + \text{ب}}{\text{ب}} = \frac{\text{ب(م} + \text{١)}}{\text{ب}} = \text{م} +$$

$$\text{الأيسر} = \frac{\text{جـ} + \text{ء}}{\text{ء}} = \frac{\text{ء م} + \text{ء}}{\text{ء}} = \frac{\text{ء(م} + \text{١)}}{\text{ء}} = \text{م} + \text{١}$$

∴ الطرفان متساويان

مع أرق تمنياتي بالنجاح والتفوق ... أ/ وليد رشدي

✍ مثال [٢٨]

إذا كان أ ، ب ، جـ ، ء كميات متناسبة برهن أن : $\frac{\text{أ}^2 + \text{جـ}^2}{\text{أب} + \text{جـ ء}} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}}$

إذا كان أ ، ب ، جـ ، ء كميات متناسبة $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{ء}} = \text{م}$ $\quad$ $\text{أ} = \text{ب م}$ ، $\text{جـ} = \text{ء م}$

الأيمن $= \frac{\text{أ}^2 + \text{جـ}^2}{\text{أب} + \text{جـ ء}} = \frac{(\text{ب م})^2 + (\text{ء م})^2}{\text{ب م ب} + \text{ء م ء}} = \frac{\text{ب}^2\text{م}^2 + \text{ء}^2\text{م}^2}{\text{ب}^2\text{م} + \text{ء}^2\text{م}} = \frac{\text{م}^2(\text{ب}^2 + \text{ء}^2)}{\text{م}(\text{ب}^2 + \text{ء}^2)} = \text{م}$

الأيسر $= \frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{ب م}}{\text{ب}} = \text{م}$ $\quad$ الطرفان متساويان

✍ مثال [٢٩]

إذا كان أ ، ب ، جـ ، ء كميات متناسبة اثبت أن : $\frac{\text{أ}^2 - \text{جـ}^2}{\text{ب}^2 - \text{ء}^2} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{ب ء}}$

إذا كان أ ، ب ، جـ ، ء كميات متناسبة $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{ء}} = \text{م}$ $\quad$ $\text{أ} = \text{ب م}$ ، $\text{جـ} = \text{ء م}$

الأيمن $= \frac{\text{أ}^2 - \text{جـ}^2}{\text{ب}^2 - \text{ء}^2} = \frac{(\text{ب م})^2 - (\text{ء م})^2}{\text{ب}^2 - \text{ء}^2} = \frac{\text{ب}^2\text{م}^2 - \text{ء}^2\text{م}^2}{\text{ب}^2 - \text{ء}^2} = \frac{\text{م}^2(\text{ب}^2 - \text{ء}^2)}{\text{ب}^2 - \text{ء}^2} = \text{م}^2$

الأيسر $= \frac{\text{أ جـ}}{\text{ب ء}} = \frac{(\text{ب م})(\text{ء م})}{\text{ب ء}} = \text{م}^2$ $\quad$ الطرفان متساويان

✍ مثال [٣٠]

إذا كان أ ، ب ، جـ ، ء كميات متناسبة اثبت أن : $\frac{5\text{أ}^2 - 3\text{جـ}^2}{5\text{ب}^2 - 3\text{ء}^2} = \frac{\text{أ}^2}{\text{ب}^2}$

إذا كان أ ، ب ، جـ ، ء كميات متناسبة $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{ء}} = \text{م}$ $\quad$ $\text{أ} = \text{ب م}$ ، $\text{جـ} = \text{ء م}$

الأيمن $= \frac{5\text{أ}^2 - 3\text{جـ}^2}{5\text{ب}^2 - 3\text{ء}^2} = \frac{5\text{ب}^2\text{م}^2 - 3\text{ء}^2\text{م}^2}{5\text{ب}^2 - 3\text{ء}^2} = \frac{\text{م}^2(5\text{ب}^2 - 3\text{ء}^2)}{5\text{ب}^2 - 3\text{ء}^2} = \text{م}^2$

الأيسر $= \frac{\text{أ}^2}{\text{ب}^2} = \frac{\text{ب}^2\text{م}^2}{\text{ب}^2} = \text{م}^2$ $\quad$ الطرفان متساويان

مثال [٣١]

إذا كان ﻫ ، ب ، جـ ، ء كميات متناسبة اثبت أن $\frac{٣ ﻫ^٢ - ٤ ب^٢}{٣ جـ^٢ - ٤ ء^٢} = (\frac{ﻫ + ب}{جـ + ء})^٢$

الحل

إذا كان ﻫ ، ب ، جـ ، ء كميات متناسبة $\frac{ﻫ}{ب} = \frac{جـ}{ء} = م$ ﻫ = ب م ، جـ = ء م

الأيمن $= \frac{٣ ﻫ^٢ - ٤ ب^٢}{٣ جـ^٢ - ٤ ء^٢} = \frac{٣ ب^٢ م^٢ - ٤ ب^٢}{٣ ء^٢ م^٢ - ٤ ء^٢} = \frac{ب^٢ (٣ م^٢ - ٤)}{ء^٢ (٣ م^٢ - ٤)} = \frac{ب^٢}{ء^٢}$

الأيسر $= (\frac{ﻫ + ب}{جـ + ء})^٢ = (\frac{ب م + ب}{ء م + ء})^٢ = (\frac{ب (م + ١)}{ء (م + ١)})^٢ = (\frac{ب}{ء})^٢ = \frac{ب^٢}{ء^٢}$

الطرفان متساويان

مثال [٣٢]

إذا كان ﻫ : ب = جـ : ء = ﻫـ : و برهن أن :

(٢ ﻫ + ٥ جـ + ٧ ﻫـ) : (٢ ب + ٥ ء + ٧ و) = (٣ ﻫ + ٥ جـ - ﻫـ) : (٣ ب + ٥ ء - و)

الحل

ﻫ : ب = جـ : ء = ﻫـ : و $\frac{ﻫ}{ب} = \frac{جـ}{ء} = \frac{ﻫـ}{و} = م$

ﻫ = ب م ، جـ = ء م ﻫـ = و م

الأيمن $=$ (٢ ﻫ + ٥ جـ + ٧ ﻫـ) : (٢ ب + ٥ ء + ٧ و) $= \frac{(٢ ﻫ + ٥ جـ + ٧ ﻫـ)}{(٢ ب + ٥ ء + ٧ و)}$

$= \frac{(٢ ب م + ٥ ء م + ٧ و م)}{(٢ ب + ٥ ء + ٧ و)} = \frac{م (٢ ب + ٥ ء + ٧ و)}{(٢ ب + ٥ ء + ٧ و)} = م$

الأيسر $=$ (٣ ﻫ + ٥ جـ - ﻫـ) : (٣ ب + ٥ ء - و) $= \frac{(٣ ﻫ + ٥ جـ - ﻫـ)}{(٣ ب + ٥ ء - و)} =$

$\frac{(٣ ب م + ٥ ء م - و م)}{(٣ ب + ٥ ء - و)} = \frac{م (٣ ب + ٥ ء - و)}{(٣ ب + ٥ ء - و)} = م$

الطرفان متساويان



تمارين على التناسب

[ا] أكمل ما يأتى

❶ إذا كان : ٢س : ٥ص = فأن س : ص = ...

❷ إذا كان : $\frac{أ}{ب} = \frac{٢}{٣}$ فأن أ = ... ، ب = ...

❸ الأول المتناسب للكميات ٤ ، ٦ ، ٨ هو ....

❹ إذا كان : ٤ ، أ ، ١٢ ، ٢٤ متناسبة فأن أ = ...

❺ إذا كان : $\frac{أ}{٣} = \frac{ب}{٥}$ فأن $\frac{أ}{ب}$ = ...

❻ الرابع المتناسب للكميات ٣ ، ٦ ، ٦ هو ....

❼ إذا كان : $\frac{أ}{ب} = \frac{٣}{٥}$ فأن $\frac{أ - ب}{أ + ب}$ = ...

❽ إذا كان : $\frac{س}{ص} = \frac{٧}{٤}$ فأن س + ص = ... ، س − ص = ... س

❾ التناسب هو ....

❿ إذا كان : $\frac{س + ص}{٣س + ص} = \frac{٢}{٣}$ فأن $\frac{س}{ص}$ = ...

⓫ إذا كان : أ ، ٢س ، ب ، ٤س متناسبة فأن $\frac{أ}{ب}$ = ...

⓬ إذا كان : ٣ ، س − ١ ، س + ١ ، ٥ متناسبة فأن س = ...

⓭ إذا كان : $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ} = \frac{جـ}{٣} = ٢$ فأن أ = ... ، ب = ...

⓮ إذا كان : $\frac{أ}{ب} = \frac{٢}{٣}$ ، $\frac{ب}{جـ} = ٤$ فأن أ : ب : جـ = ...

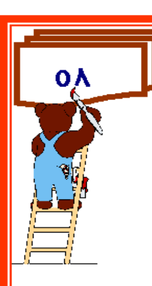
⓯ إذا كان : س ، ص ، ع ، ل كميات متناسبة فأن $\frac{س}{ص}$ = ...

⓰ إذا كان : $\frac{س}{ص} = \frac{ع}{ل} = ١$ فأن $\frac{س + ع}{ص + ل}$ = ...

⓱ إذا كان : $\frac{س}{٣} = \frac{ص}{٥} = \frac{ع}{٧}$ فأن $\frac{س + ص - ع}{س + ص}$ = ...

⓳ إذا كان : س^{٢} − ٤س ص + ٤ص^{٢} = ٠ فأن $\frac{س}{ص}$ = ...

مع أرق تمنياتي بالنجاح والتفوق ... أ/ وليد رشدي



٢٤ إذا كان : ٧س = ٩ص فأن $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$ = ...

٢٥ إذا كان : $\frac{\text{٥أ} - \text{٧ب}}{\text{٨أ} + \text{١١ب}}$ = صفر فأن $\frac{\text{ب}}{\text{أ}}$ = ...

٢٦ إذا كان $\frac{\text{أ}}{\text{٢}} = \frac{\text{ب}}{\text{٣}}$ فأن $\frac{\text{٢أ}}{\text{٣ب}}$ = ...

٢٧ الثالث المتناسب للكميات : (٤س + ٥ص) ، (٤س − ٥ص) ، (١٦س^{٢} − ٢٥ ص^{٢}) هو ....

٢٨ إذا كان : ٣ ، (أ − ١) ، (أ + ١) ، ٥ متناسبة فأن : أ = ...

٢٩ إذا كان : ٣أ = ٧ب فأن (أ + ب) : (أ − ب) = ... : ....

٣٠ إذا كان : ٩أ^{٢} − ٢٥ب^{٢} = صفر حيث أ ∈ ح$^{+}$ فأن : أ:ب = ...

٣١ إذا كان : $\frac{\text{أ}}{\text{٤}} = \frac{\text{ب}}{\text{٥}}$ ، ٢أ + ٣ ب = ٤٦ فأن : أ = ...

٣٢ إذا كان : $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{٣}}{\text{٥}}$ ، $\frac{\text{أ}}{\text{جـ}} = \frac{\text{٣}}{\text{٧}}$ فأن $\frac{\text{جـ}}{\text{ب}}$ = ...

[٢] اختر الإجابة الصحيحة من كل مما يأتي :

١ الأول المتناسب ٢١ ، ١٥ ، ٣٥ هو ....

(أ) $\frac{\text{٣}}{\text{٧}}$ (ب) ٣ (جـ) ٧ (ء) ٩

٢ إذا كان : ٢٥س^{٢} − ٤٠س ص + ١٦ ص^{٢} = ٠ فأن $\frac{\text{س}}{\text{ص}}$ = ...

(أ) $\frac{\text{٤}}{\text{٥}}$ (ب) $\frac{\text{٥}}{\text{٨}}$ (جـ) $\frac{\text{٥}}{\text{٤}}$ (ء) $\frac{\text{٢}}{\text{٥}}$

٣ إذا كان : $\frac{\text{٣أ} - \text{٢ب}}{\text{٧أ} + \text{٢ب}}$ = ٠ فأن $\frac{\text{ب}}{\text{أ}}$ = ...

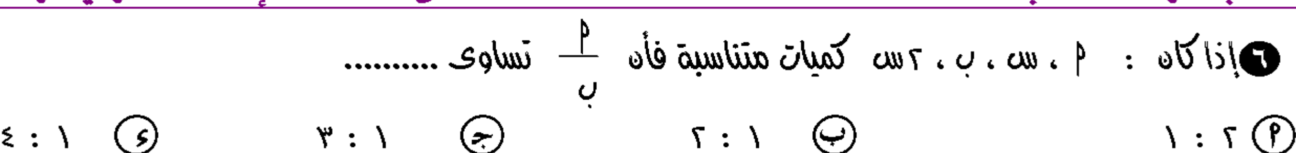
(أ) $\frac{\text{٢}}{\text{٣}}$ (ب) $\frac{\text{٣}}{\text{٢}}$ (جـ) $\frac{\text{٤}}{\text{٧}}$ (ء) $\frac{\text{٣}}{\text{٧}}$

٤ الرابع المتناسب للكميات ٣ ، ٦ ، ٩ هو...........

(أ) ٣ (ب) ٦ (جـ) ١٨ (ء) ١٢

٥ إذا كان : أ ء = ب جـ فأن الكميات .... غير متناسبة

(أ) أ ، ب ، جـ ، ء (ب) ب ، أ ، ء ، جـ (جـ) أ ، جـ ، ء ، ب (ء) ب ، ء ، أ ، جـ



⑥ إذا كان : أ ، س ، ب ، ٢س كميات متناسبة فأن $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ تساوى ....

(أ) ٢ : ١ (ب) ١ : ٢ (ج) ١ : ٣ (د) ١ : ٤

⑦ $\frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{٢}{٣}$ فأن $\frac{٣\text{س} + \text{ص}}{\text{س} + ٣\text{ص}} =$ ....

(أ) $\frac{١١}{٩}$ (ب) $\frac{٨}{١١}$ (ج) $\frac{٩}{١١}$ (د) $\frac{٤}{٩}$

⑧ إذا كان : أ ، ٣س ، ب ، ٢س فى تناسب فأن $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} =$ ....

(أ) $\frac{٣\text{س}}{٢}$ (ب) $\frac{٢\text{س}}{٣}$ (ج) $\frac{٣}{٢}$ (د) $\frac{٢}{٣}$

⑨ إذا كان ٢أ = ٣ب = ٤جـ فأن أ : ب : جـ = ...

(أ) ٢ : ٣ : ٤ (ب) ٤ : ٣ : ٢ (ج) ٦ : ٤ : ٣ (د) ٦ : ٣ : ٤

⑩ إذا كانت $(\sqrt{٣} - ١)$ ، ٣ ، س ، $(\sqrt{٣} + ١)$ متناسبة فأن س = ...

(أ) $\frac{٣}{٢}$ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (ج) $\frac{٣}{٥}$ (د) $\frac{٥}{٣}$

⑪ إذا كان : $\frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{٣}{٤}$ وكان س + ص = ١٤ فأن س = ... ، ص = ...

(أ) ٣ ، ٤ (ب) ٤ ، ٣ (ج) ٦ ، ٨ (د) ٨ ، ٦

⑫ إذا كان : $\frac{\text{أ}}{٢} = \frac{\text{ب}}{٣}$ وكان ٥أ − ٢ب = ١٦ فأن أ = ...

(أ) ٦ (ب) ٥ (ج) ٨ (د) ١٠

⑬ إذا كان : $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{٥}{٣}$ فأن $(٣\text{أ} - ٥\text{ب} - ٢)^{٢} =$ ....

(أ) ٩ (ب) ٢٥ (ج) ٤ (د) ٠

⑭ إذا كان : $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{٣}{٤}$ ، $\frac{\text{ب}}{\text{جـ}} = \frac{٢}{٣}$ فأن $\frac{\text{أ}}{\text{جـ}} =$ ....

(أ) $\frac{٥}{٧}$ (ب) $\frac{٣}{٢}$ (ج) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{٤}{٣}$

⑮ إذا كان : ٣ ، ٤ ، س ، ١١ أربعة كميات متناسبة فأن س = ...

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (ج) $\frac{٣٣}{٤}$ (د) $\frac{١١}{٤}$



⑯ إذا كان : $\frac{أ + ب}{أ + ٢ب} = \frac{٢}{٥}$ فأن أ : ب = ... : ....

(أ) ٣ : ١ (ب) ٣ : ١ (جـ) −١ : ٣ (د) ±١ : ٣

⑰ إذا كان : أ ، ب ، ٢ ، ٣ متناسبة فأن $\frac{ب}{أ}$ = ...

(أ) $\frac{٣}{٢}$ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (جـ) ٣ (د) $\frac{٤}{٣}$

⑱ إذا كان : ٣ أ = ٨ب فأن : $\frac{٢أ}{ب}$ = ...

(أ) ٢٤ (ب) ١٦ (جـ) $\frac{١٦}{٣}$ (د) $\frac{٣}{٨}$

⑲ إذا كان : ٢س = ٧ص فأن $(\frac{س}{ص})^{-١}$ = ...

(أ) $\frac{٢}{٧}$ (ب) $\frac{٧}{٢}$ (جـ) $\frac{٤٩}{٤}$ (د) $\frac{٤}{٤٩}$

⑳ إذا كان : ٥أ ، ٢ص ، ٣ب ، ٧ص أربعة كميات متناسبة فأن $\frac{أ}{ب}$ = ...

(أ) $\frac{٣}{٧}$ (ب) $\frac{٦}{٣٥}$ (جـ) $\frac{٣}{٥}$ (د) $\frac{٢}{٣}$

㉑ إذا كان : أ ب = جـ د فأن $\frac{أ}{جـ}$ = ...

(أ) $\frac{ب}{د}$ (ب) $\frac{د}{ب}$ (جـ) ب د (د) $\frac{أ}{د}$

㉒ إذا كان : ٤س^٢ + ٩ص^٢ = ١٢س ص فأن $\frac{س}{ص}$ = ...

(أ) $\frac{٣}{٢}$ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (جـ) $\frac{-٣}{٢}$ (د) $\frac{-٢}{٣}$

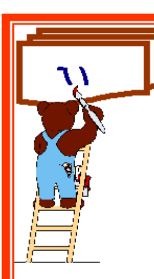
㉓ إذا كان : أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة فأن : ....

(أ) $\frac{ب}{د} = \frac{أ}{جـ}$ (ب) $\frac{أ}{جـ} = \frac{د}{ب}$ (جـ) $\frac{ب}{جـ} = \frac{أ}{د}$ (د) أب = جـ د

㉔ إذا كان : $\frac{أ}{٥} = \frac{ب}{٧}$ فأن ٧أ − ٥ب + ٣ = ...

(أ) ٣ (ب) ٧ (جـ) ٥ (د) ٢

مع أرق تمنياتي بالنجاح والتفوق ... أ/ وليد رشدي



✍ [٣] إذا كان : $\frac{أ}{ب} = \frac{٣}{٤}$ فأوجد كلا من النسب الآتية : $\frac{أ + ب}{أ - ب}$ ، $\frac{أ^٢ - ب^٢}{ب^٢ - أ^٢}$

✍ [٤] إذا كان : $\frac{س}{ص} = \frac{٢}{٣}$ فأوجد قيمة النسبة : $\frac{٣س + ٢ص}{٦ص - س}$ ، $\frac{س^٢ + س ص - ص^٢}{٦س ص}$

✍ [٥] إذا كان : $\frac{س}{ص} = \frac{٣}{٥}$ فأوجد قيمة : $\frac{٧س + ٩ص}{٤س + ٢ص}$

✍ [٦] إذا كان : $\frac{س}{٥} = \frac{ص}{٣}$ فأوجد قيمة النسبة : $\frac{٣س + ص}{س + ٣ص}$ ، $\frac{س^٢ + ص^٢}{٢س ص}$

✍ [٧] إذا كان : $\frac{س}{٣} = \frac{ص}{٤} = \frac{ع}{٨}$ أوجد القيمة العددية للمقدار : $\frac{س - ص + ع}{س + ص}$

ثم اثبت أن : $\frac{٢س - ص + ع}{١٠} = \frac{س + ٢ص - ع}{٣}$

✍ [٨] إذا كان : $\frac{س}{٧} = \frac{ص}{٣}$ اثبت أن : $(٢س - ٣ص)$ ، $(س + ٢ص)$ ، ١٠ ، ٢٦ متناسبة .

✍ [٩] إذا كان : $\frac{س}{٣} = \frac{ص}{٤} = \frac{ع}{٥}$

فاثبت أن ❶ $\frac{٢ص - ع}{٣س - ٢ص + ع} = \frac{١}{٢}$　❷ $\sqrt{٣س^٢ + ٣ص^٢ + ع^٢} = ٢س + ص$

✍ [١٠] إذا كان : $٣س = ٢ص = ٤ع$ فأوجد النسبة س : ص : ع

✍ [١١] إذا كان : $\frac{أ}{ب} = \frac{٣}{٥}$ ، $\frac{أ}{جـ} = \frac{٣}{٧}$ فأوجد قيمة المقدار : أ + ب + جـ بدلالة أ

✍ [١٢] إذا كان : $\frac{س}{ص} = \frac{٣}{٤}$ ، $\frac{س}{ع} = \frac{٢}{٥}$ وكان : $٣س + ٢ص + ع = ٤٩$ فأوجد قيمة : س ، ص ، ع

✍ [١٣] إذا كان : أ : ب : جـ = ٥ : ٧ : ٣ وكان أ + ب = ٢٧,٦ فأوجد قيمة كلا من أ ، ب ، جـ

✍ [١٤] إذا كان : أ : ب : جـ = ٣ : ٤ : ٥ فأوجد القيمة العددية للمقدار : $\frac{أ^٢ + ب^٢ + جـ^٢}{أ(ب + جـ)}$

✍ [١٥] إذا كان : $\frac{س}{ص} = \frac{٢}{٣}$ ، $\frac{ع}{ل} = \frac{٣}{٥}$ اوجد قيمة $\frac{س ع + ٣ص ل}{٣س ل + ٥ص ع}$

✍ [١٦] إذا كان : ٢أ = ٧ب ، ٥جـ = ٢د فأوجد قيمة $\frac{أجـ + ب د}{أجـ - ب د}$

✍ [١٧] إذا كان (٢أ + ب) : (٣أ − ب) = ٥ : ٣ فأوجد أ : ب ثم أوجد قيمة (٥أ + ٢ب) : (٢أ − ب)

مع أرق تمنياتي بالنجاح والتفوق ... أ/ وليد رشدي



[١٨] إذا كان : $س^٢ - ٦س ص + ٩ص^٢ = ٠$ فأوجد قيمة $\frac{٢س + ص}{٣س - ٢ص}$

[١٩] إذا كان : $٢٥س^٢ + ٤ص^٢ = ٢٠س ص$ فأوجد قيمة س ، ص

ثم أوجد قيمة : $\frac{١٠س + ٦ص}{١٥س - ٤ص}$ ، $\frac{٢٥س^٢ + ١٠س ص + ٢ص^٢}{٥ص^٢}$

[٢٠] إذا كان : $س^٢ + ٦٤ص^٢ = ١٦س ص$ فأوجد قيمة $\frac{٢س + ٣ص}{س - ٥ص}$

[٢١] إذا كان : $س^٢ - ٤ص^٢ = ٣س ص$ فأوجد قيمة س : ص

[٢٢] إذا كان : $٣س^٢ - ١٠س ص + ٧ص^٢ = ٠$ ، $س \neq ص$ فأوجد النسبة س : ص

[٢٣] إذا كان : $\frac{س + ٣ص}{٢س - ص} = \frac{٤}{٣}$ فأوجد النسبة س : ص

[٢٤] إذا كان : $\frac{٢س + ٣}{٢س - ٣} = \frac{٢ص + ٥}{٢ص - ٥}$ أثبت أن $\frac{س}{ص} = \frac{٣}{٥}$

[٢٥] إذا كان : ٧س − ٣ص : س + ص = ٣ : ١ فأوجد النسبة ١٢س + ٩ص : ١١س − ٣ص

[٢٦] **أوجد العدد الذى يجب إضافته إلى كل الأعداد الآتية لنحصل على أعداد متناسبة .**

❶ ٣ ، ٥ ، ٨ ، ١٢ ❷ ١ ، ٦ ، ١٣ ، ٣٨

❸ ١ ، ٣ ، ٧ ، ١١

[٢٧] **أوجد العدد الذى يجب طرحة من كل الأعداد الآتية لنحصل على أعداد متناسبة .**

❶ ٧ ، ٩ ، ١٦ ، ٢٤ ❷ ١٦ ، ٢١ ، ١٤ ، ١٨

❸ ٦ ، ٩ ، ١٣ ، ٢٣

[٢٨] **أوجد الثالث المتناسب لكل مما يأتى :**

❶ ٣ ، ٥ ، .... ، ٤٥ ❷ ٢ ، ٧ ، .... ، ٣٥

❸ ٨ ، ٧ ، .... ، ١٤ ❹ أ ، (أ + ب) ، .... ، ($أ^٢ - ب^٢$)

❺ س ، س ص ، .... ، $ص^٢$ ❻ أ + ب ، أ − ب ، .... ، $أ^٢ - ب^٢$

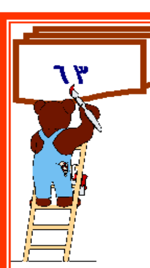
[٢٩] **أوجد الرابع المتناسب لكل مما يأتى :**

❶ ٣ ، ٥ ، ٢٧ ❹ (أ + ب) ، (أ − ب) ، (أ − ب)

❷ ٢ ، ٧ ، ١٠ ❺ ل + م ، ٢ ، $ل^٢ - م^٢$

❸ أ ، أ ، (أ + ب) ❻ $أ^٢ - ٤$ ، $أ^٢ - ٥أ + ٦$ ، أ + ٢

مع أرق تمنياتي بالنجاح والتفوق ... أ/ وليد رشدي



[٣٠] اثبت أن أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة :

❶ $\frac{أ + ب}{ب} = \frac{جـ + د}{د}$

❷ $\frac{أ}{أ - ب} = \frac{جـ}{جـ - د}$

❸ $\frac{أ - ب}{أ + ب} = \frac{جـ - د}{جـ + د}$

❹ $\frac{أ^{٢} - ٢جـ^{٢}}{ب^{٢} - ٢د^{٢}} = \frac{أ^{٢}}{ب^{٢}}$

❺ $\frac{أ + ٥جـ}{أ + جـ} = \frac{ب + ٥د}{ب + د}$

❻ $\frac{٢أ + ب}{٢أ - ب} = \frac{٢جـ + د}{٢جـ - د}$

[٣١] إذا كان أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة فاثبت أن :

❶ $\frac{أ + ب}{ب} = \frac{جـ + د}{د}$

❷ $\frac{أ + ٣ب}{جـ + ٣د} = \frac{٢أ + ب}{٢جـ + د}$

❸ $\frac{أ^{٢} + ب^{٢}}{جـ^{٢} + د^{٢}} = \frac{أ^{٢}}{جـ^{٢}}$

❹ $\frac{أ^{٢} - جـ^{٢}}{ب^{٢} - د^{٢}} = \frac{أجـ}{ب د}$

❺ $\frac{٢أ^{٢} - ٥جـ^{٢}}{٢ب^{٢} - ٥د^{٢}} = \frac{أجـ}{ب د}$

❻ $\frac{أ^{٢} + جـ^{٢}}{أب + جـ د} = \frac{أ}{ب}$

❼ $\left(\frac{أ + جـ}{ب + د}\right)^{٢} = \frac{أ^{٢} - أجـ + جـ^{٢}}{ب^{٢} - ب د + د^{٢}}$

❽ $\sqrt{\frac{٥أ^{٢} - ٢جـ^{٢}}{٥ب^{٢} - ٢د^{٢}}} = \frac{أ + جـ}{ب + د}$

[٣٢] إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د} = \frac{هـ}{و}$ اثبت أن :

❶ $\frac{أ + ٥جـ}{ب + ٥د} = \frac{جـ - ٣هـ}{د - ٣و}$

❷ $\frac{٢أ + ٧جـ - ٤هـ}{٢ب + ٧د - ٤و} = \frac{أ - ٨هـ}{ب - ٨و}$

❸ $\sqrt{\frac{٥أ^{٢} - ٧جـ هـ}{٥ب^{٢} - ٧د و}} = \frac{٢أ + جـ}{٢ب + د}$

❹ $\frac{أ^{٢} + ٢جـ هـ}{أ جـ} = \frac{ب^{٢} + ٢د و}{ب د}$

❺ $\sqrt{\frac{٣أ^{٢} - ٥جـ^{٢}}{٣ب^{٢} - ٥د^{٢}}} = \frac{أ}{ب}$

❻ $\frac{جـ^{٢} + هـ^{٢}}{د^{٢} + و^{٢}} = \frac{٢أجـ + ٥هـ^{٢}}{٢ب د + ٥و^{٢}}$

❼ $\frac{٢أ^{٤}ب^{٢} + ٣أ^{٢}هـ^{٢} - ٥هـ^{٤}و}{٢ب^{٦} + ٣ب^{٢}و^{٢} - ٥و^{٥}} = \frac{أ^{٤}}{ب^{٤}}$

خواص التناسب



ملاحظة ١

أى نسبة لا تتغير إذا ضرب كل من حديها فى نفس العدد

✍ مثال [١]

إذا كانت : $\frac{\text{س}}{٥} = \frac{\text{ص}}{٣} = \frac{\text{ع}}{٢}$ **: اثبت أن** $\frac{٢\text{س} - ٢\text{ص} + ٣\text{ع}}{١٠} = \frac{\text{س} + \text{ع}}{٧}$

باستخدام الملاحظة السابقة نفرض أن $\frac{\text{س}}{٥} = \frac{\text{ص}}{٣} = \frac{\text{ع}}{٢} = \text{م}$

وبضرب حدى النسبة الأولى × ٢ ، الثانية × (−٢) ، الثالثة × ٣

$\therefore \frac{٢\text{س}}{١٠} = \frac{-٢\text{ص}}{-٦} = \frac{٣\text{ع}}{٦} = \text{م}$ ∴ وبجمع مقدمات وتوالى هذه النسب الثلاثة

$\therefore \frac{٢\text{س} - ٢\text{ص} + ٣\text{ع}}{١٠ - ٦ + ٦} = \frac{٢\text{س} - ٢\text{ص} + ٣\text{ع}}{١٠} = \text{م}$ .... ❶

وبجمع مقدمات وتوالى النسبتين الأولى والثالثة الأصليتين $\therefore \frac{\text{س} + \text{ع}}{٥ + ٢} = \frac{\text{س} + \text{ع}}{٧} = \text{م}$ .... ❷ من ❶ ، ❷

$\therefore \frac{٢\text{س} - ٢\text{ص} + ٣\text{ع}}{١٠} = \frac{\text{س} + \text{ع}}{٧}$

✍ مثال [٢]

إذا كانت : $\frac{\text{أ}}{\text{س} + \text{ص}} = \frac{\text{ب}}{\text{س} - \text{ص}}$ **: اثبت أن** $\frac{\text{أ} + \text{ب}}{\text{س}} = \frac{\text{أ} - \text{ب}}{\text{ص}}$

بجمع مقدمات وتوالى النسبتين $\therefore \frac{\text{أ} + \text{ب}}{\text{س} + \text{ص} + \text{س} - \text{ص}} = \frac{\text{أ} + \text{ب}}{٢\text{س}} = \text{م}$ .... ❶

بطرح مقدمات وتوالى النسبتين $\therefore \frac{\text{أ} - \text{ب}}{\text{س} + \text{ص} - \text{س} + \text{ص}} = \frac{\text{أ} - \text{ب}}{٢\text{ص}} = \text{م}$ .... ❷

من ❶ ، ❷ $\therefore \frac{\text{أ} + \text{ب}}{٢\text{س}} = \frac{\text{أ} - \text{ب}}{٢\text{ص}}$ $\therefore \frac{\text{أ} + \text{ب}}{\text{س}} = \frac{\text{أ} - \text{ب}}{\text{ص}}$

✍ مثال [٣]

إذا كانت : $\frac{أ}{٢س + ٣ص} = \frac{ب}{٢س - ٣ص}$ **: اثبت أن** $\frac{أ + ب}{أ - ب} = \frac{٢س}{٣ص}$

بجمع مقدمات وتوالى النسبتين ∴ $\frac{أ + ب}{٢س + ٣ص + ٢س - ٣ص} = \frac{أ + ب}{٤س} = م$ .... ❶

بطرح مقدمات وتوالى النسبتين ∴ $\frac{أ - ب}{٢س + ٣ص - ٢س + ٣ص} = \frac{أ - ب}{٦ص} = م$ .... ❷ من ❶ ، ❷

∴ $\frac{أ + ب}{٤س} = \frac{أ - ب}{٦ص}$ ∴ $\frac{أ + ب}{٢س} = \frac{أ - ب}{٣ص}$ وبتبديل مقدم مكان تالى ∴ $\frac{أ + ب}{أ - ب} = \frac{٢س}{٣ص}$

✍ مثال [٤]

إذا كان $\frac{ل}{م + ل} = \frac{م}{ن + م} = \frac{ن}{ل + ن}$ **اثبت أن كل النسب** $= \frac{١}{٢}$ **ما لم يكن** ل + م + ن = صفر

بجمع مقدمات وتوالى النسب الثلاثة $\frac{ل + م + ن}{ل + م + م + ن + ن + ل} = \frac{ل + م + ن}{٢ل + ٢م + ٢ن} = \frac{ل + م + ن}{٢(ل + م + ن)} = \frac{١}{٢}$

ما لم تكن ل + م + ن = ٠ لأنه كانت كذلك فأننا لا نستطيع الاختصار حيث لا يجوز القسمة ÷ صفر

✍ مثال [٥]

إذا كان : $\frac{س + ٢ع}{ص} = \frac{٢ع}{س} = \frac{س}{٢ع - ص}$ **: اثبت أن**

❶ **كل النسب** = ٢ بشرط أن س + ع ≠ ٠ ❷ ع = س ❸ ٢س = ص

بجمع مقدمات وتوالى كل النسب ∴ $\frac{س + ٢ع + ٢ع + س}{ص + س + ٢ع - ص} = \frac{٢س + ٤ع}{س + ٢ع} = \frac{٢(س + ٢ع)}{س + ٢ع} = ٢$

∴ كل النسب = ٢

لإثبات أن ع = ٢س من النسبة الثانية $\frac{٢ع}{س} = ٢$ لأن كل النسب = ٢

∴ ٢ع = ٢س ∴ س = ع

وبالتعويض عن كل ع = س فى النسبة الأولى $\frac{س + ٢ع}{ص} = \frac{س + ٢س}{ص} = \frac{٤س}{ص} = ٢$ = كل النسب

∴ ٤س = ٢ص ∴ ص = ٢س

✍ مثال [٦]

إذا كان : $\frac{س}{٣أ - ب} = \frac{ص}{٣ب - جـ} = \frac{ع}{٤جـ - أ}$: اثبت أن $\frac{س + ٣ع}{١٢جـ - ب} = \frac{٤ص + ع}{١٢ب - أ}$

بضرب حدى النسبة الثالثة × ٣ و إضافتها إلى النسبة الأولى

$$\frac{س + ٣ع}{٣أ - ب + ١٢جـ - ٣أ} = \frac{س + ٣ع}{١٢جـ - ب} = م \quad \text{.................. (1)}$$

بضرب حدى النسبة الثانية × ٤ وإضافتها إلى النسبة الثالثة

$$\frac{٤ص - ع}{١٢ب - ٤جـ + ٤جـ - أ} = \frac{٤ص - ع}{١٢ب - أ} = م \quad \text{..................}$$

من (1) ، (2)

$$\therefore \frac{س + ٣ع}{١٢جـ - ب} = \frac{٤ص + ع}{١٢ب - أ}$$

✍ مثال [٧]

إذا كانت $\frac{أ}{س + ص - ع} = \frac{ب}{س - ص + ع} = \frac{جـ}{ص + ع - س}$: اثبت أن $\frac{أ + ب}{س} = \frac{ب + جـ}{ع} = \frac{أ + جـ}{ص}$

بجمع مقدمات وتوالى النسبتين الأولى والثانية

$$\frac{أ + ب}{س + ص - ع + س - ص + ع} = \frac{أ + ب}{٢س} = م \quad \text{.................. (1)}$$

بجمع مقدمات وتوالى النسبتين الثانية والثالثة

$$\frac{ب + جـ}{س - ص + ع + ص + ع - س} = \frac{ب + جـ}{٢ع} = م \quad \text{.................. (2)}$$

بجمع مقدمات وتوالى النسبتين الأولى والثالثة

$$\frac{أ + جـ}{س + ص - ع + ص + ع - س} = \frac{أ + جـ}{٢ص} = م \quad \text{.................. (3)}$$

من (1) ، (2) ، (3)

$$\therefore \frac{أ + ب}{٢س} = \frac{ب + جـ}{٢ع} = \frac{أ + جـ}{٢ص} \qquad \therefore \frac{أ + ب}{س} = \frac{ب + جـ}{ع} = \frac{أ + جـ}{ص}$$

مثال [٨]

إذا كانت $\frac{أ}{س - ص + ع} = \frac{ب}{س + ص - ع} = \frac{جـ}{ص + ع - س}$ **اثبت أن : كل النسب** $= \frac{أ س + ب ص + جـ ع}{س^٢ + ص^٢ + ع^٢}$

بضرب حدى النسبة الأولى × س ∴ $\frac{أ س}{س^٢ - ص س + ع س} = م$ .... ❶

بضرب حدى النسبة الثانية × ص ∴ $\frac{ب ص}{ص س + ص^٢ - ص ع} = م$ .... ❷

بجمع مقدمات وتوالى النسبتين الأولى والثالثة ∴ $\frac{جـ ع}{ص ع + ع^٢ - ع س} = م$ .... ❸

بجمع مقدمات وتوالى ❶ ، ❷ ، ❸

$$∴ \frac{أ س + ب ص + جـ ع}{س^٢ - ص س + ع س + ص س + ص^٢ - ص ع + ص ع + ع^٢ - ع س} = م$$

$$∴ \frac{أ س + ب ص + جـ ع}{س^٢ + ص^٢ + ع^٢} = \text{كل النسب}$$

مثال [٩]

إذا كانت $\frac{س}{أ - ٢ب} = \frac{ص}{ب - ٢جـ} = \frac{ع}{جـ - ٢أ}$ **اثبت أن :** $\frac{س + ٢ص - ع}{٣أ - ٥جـ} = \frac{ص + ٢ع}{ب - ٤أ}$

بضرب حدى النسبة الثانية × ٢ و ضرب حدى النسبة الثالثة × (− ١)

$∴ \frac{س}{أ - ٢ب} = \frac{٢ص}{٢ب - ٤جـ} = \frac{-ع}{-جـ + ٢أ} = م$ بجمع مقدمات وتوالى النسب الثلاثة

$\frac{س + ٢ص - ع}{أ - ٢ب + ٢ب - ٤جـ - جـ + ٢أ} = م$ ∴ $\frac{س + ٢ص - ع}{٣أ - ٥جـ} = م$ .... ❶

نضرب حدى النسبة الثالثة × ٢ وجمع مقدمات وتوالى النسبتين الثانية والثالثة فقط .

$∴ \frac{ص + ٢ع}{ب - ٢جـ + ٢جـ - ٤أ} = \frac{ص + ٢ع}{ب - ٤أ} = م$ .... ❷ من ❶ ، ❷

$$∴ \frac{س + ٢ص - ع}{٣أ - ٥جـ} = \frac{ص + ٢ع}{ب - ٤أ}$$

✍ مثال [١٠]

إذا كان : $\frac{\text{أ} + \text{ب}}{\text{س} + \text{ص}} = \frac{\text{ب} + \text{جـ}}{\text{ص} + \text{ع}} = \frac{\text{جـ} + \text{أ}}{\text{ع} + \text{س}}$ **اثبت أن :** $\frac{\text{أ}}{\text{س}} = \frac{\text{ب} - \text{أ}}{\text{ص} - \text{س}}$

نلاحظ أن لكى نحصل على النسبة $\frac{\text{أ}}{\text{س}}$ يجب التخلص من المقدمات ب ، جـ وذلك بضرب حدى النسبة الثانية فى (− ١)

$$\therefore \frac{\text{أ} + \text{ب}}{\text{س} + \text{ص}} = \frac{-\text{ب} - \text{جـ}}{-\text{ص} - \text{ع}} = \frac{\text{جـ} + \text{أ}}{\text{ع} + \text{س}} = \text{م}$$

بجمع المقدمات و التوالى للنسب الثلاثة :

$$\therefore \frac{\text{أ} + \text{ب} - \text{ب} - \text{جـ} + \text{جـ} + \text{أ}}{\text{س} + \text{ص} - \text{ص} - \text{ع} + \text{ع} + \text{س}} = \frac{٢\text{أ}}{٢\text{س}} = \frac{\text{أ}}{\text{س}} = \text{م} \quad .... (١)$$

بالنظر إلى النسبتين الثانية والثالثة فقط وبضرب حدى النسبة الثالثة فى (−١)

$$\therefore \frac{\text{ب} + \text{جـ}}{\text{ص} + \text{ع}} = \frac{-\text{جـ} - \text{أ}}{-\text{ع} - \text{س}} = \text{م} \qquad \therefore \frac{\text{ب} + \text{جـ} - \text{جـ} - \text{أ}}{\text{ص} + \text{ع} - \text{ع} - \text{س}} = \frac{\text{ب} - \text{أ}}{\text{ص} - \text{س}} = \text{م} \quad .... (٢)$$

من (١) ، (٢)

$$\therefore \frac{\text{أ}}{\text{س}} = \frac{\text{ب} - \text{أ}}{\text{ص} - \text{س}}$$

✍ مثال [١١]

إذا كانت $\frac{\text{س} + \text{ص}}{٧} = \frac{\text{ص} + \text{ع}}{٩} = \frac{\text{ع} + \text{س}}{٨}$ **اثبت أن :** $\frac{\text{س}}{٣} = \frac{\text{ص}}{٤} = \frac{\text{ع}}{٥}$

بضرب حدى النسبة الثانية × (− ١)

$$\therefore \frac{\text{س} + \text{ص}}{٧} = \frac{-\text{ص} - \text{ع}}{-٩} = \frac{\text{ع} + \text{س}}{٨} = \text{م}$$

وبجمع مقدمات وتوالى النسب الثلاث :

$$\therefore \frac{\text{س} + \text{ص} - \text{ص} - \text{ع} + \text{ع} + \text{س}}{٧ - ٩ + ٨} = \frac{٢\text{س}}{٦} = \frac{\text{س}}{٣} = \text{م}$$

بضرب حدى النسبة الثالثة × (−١)

$$\therefore \frac{\text{س} + \text{ص}}{٧} = \frac{\text{ص} + \text{ع}}{٩} = \frac{-\text{ع} - \text{س}}{-٨} = \text{م}$$

وبجمع مقدمات وتوالى النسب الثلاث

$$\therefore \frac{\text{س} + \text{ص} + \text{ص} + \text{ع} - \text{ع} - \text{س}}{٧ + ٩ - ٨} = \frac{٢\text{ص}}{٨} = \frac{\text{ص}}{٤} = \text{م}$$

بضرب حدى النسبة الأولى × (− ١)

$$\therefore \frac{-\text{س} - \text{ص}}{-٧} = \frac{\text{ص} + \text{ع}}{٩} = \frac{\text{ع} + \text{س}}{٨} = \text{م}$$

وبجمع مقدمات وتوالى النسب الثلاث

$$\therefore \frac{-\text{س} - \text{ص} + \text{ص} + \text{ع} + \text{ع} + \text{س}}{-٧ + ٩ + ٨} = \frac{٢\text{ع}}{١٠} = \frac{\text{ع}}{٥} = \text{م}$$

من (١) ، (٢) ، (٣)

$$\therefore \frac{\text{س}}{٣} = \frac{\text{ص}}{٤} = \frac{\text{ع}}{٥}$$

✍ مثال [١٢]

إذا كانت $\frac{\text{س} + \text{ص}}{\text{٧}} = \frac{\text{ص} + \text{ع}}{\text{٩}} = \frac{\text{ع} + \text{س}}{\text{٨}}$ **اثبت أن :** $\frac{\text{س} + \text{ص} + \text{ع}}{\text{٥س} + \text{٤ص} + \text{٣ع}} = \frac{\text{٦}}{\text{٢٣}}$

بجمع مقدمات وتوالى النسب الثلاثة

$$\frac{\text{س} + \text{ص} + \text{ص} + \text{ع} + \text{ع} + \text{س}}{\text{٧} + \text{٩} + \text{٨}} = \frac{\text{٢س} + \text{٢ص} + \text{٢ع}}{\text{٢٤}}$$

$$= \frac{\text{٢}(\text{س} + \text{ص} + \text{ع})}{\text{٢٤}} = \frac{\text{س} + \text{ص} + \text{ع}}{\text{١٢}} = \text{م}$$ .... ❶

بضرب النسبة الأولى × ٣ ، وضرب النسبة الثالثة × ٢ وجمع مقدمات وتوالى النسب الثلاثة

$$\frac{\text{٣س} + \text{٣ص} + \text{ص} + \text{ع} + \text{٢ع} + \text{٢س}}{\text{٢١} + \text{٩} + \text{١٦}} = \frac{\text{٥س} + \text{٤ص} + \text{٣ع}}{\text{٤٦}} = \text{م}$$ .... ❷ من ❶ ، ❷

∴ $\frac{\text{س} + \text{ص} + \text{ع}}{\text{١٢}} = \frac{\text{٥س} + \text{٤ص} + \text{٣ع}}{\text{٤٦}} = \text{م}$ ∴ $\frac{\text{س} + \text{ص} + \text{ع}}{\text{٦}} = \frac{\text{٥س} + \text{٤ص} + \text{٣ع}}{\text{٢٣}} = \text{م}$ وبتبديل مقدم مكان تالى

∴ $\frac{\text{س} + \text{ص} + \text{ع}}{\text{٥س} + \text{٤ص} + \text{٣ع}} = \frac{\text{٦}}{\text{٢٣}}$

✍ مثال [١٣]

إذا كانت $\frac{\text{٣س} - \text{ص}}{\text{٥}} = \frac{\text{٣ص} - \text{ع}}{\text{٣}} = \frac{\text{س} - \text{٣ع}}{\text{٢}}$ **اثبت أن :** $\frac{\text{س} + \text{ص} + \text{ع}}{\text{٤ص} + \text{٤ع}} = \text{٣}$

بضرب حدى النسبة الثالثة × (− ١) وجمع مقدمات وتوالى كل النسب

∴ $$\frac{\text{٣س} - \text{ص} + \text{٣ص} - \text{ع} - \text{س} + \text{٣ع}}{\text{٥} + \text{٣} - \text{٢}} = \frac{\text{٢س} + \text{٢ص} + \text{٢ع}}{\text{٦}} = \frac{\text{٢}(\text{س} + \text{ص} + \text{ع})}{\text{٦}} = \frac{\text{س} + \text{ص} + \text{ع}}{\text{٣}} = \text{م}$$ .... ❶

بضرب حدى النسبة الثالثة × (− ٣) وجمع مقدمات وتوالى كل النسب

$$\frac{\text{٣س} - \text{ص} + \text{٣ص} - \text{ع} - \text{٣س} + \text{٩ع}}{\text{٥} + \text{٣} - \text{٦}} = \frac{\text{٢ص} + \text{٨ع}}{\text{٢}} = \frac{\text{ص} + \text{٤ع}}{\text{١}} = \text{م}$$ .... ❷

من ❶ ، ❷

∴ $\frac{\text{س} + \text{ص} + \text{ع}}{\text{٣}} = \frac{\text{ص} + \text{٤ع}}{\text{١}}$ بتبديل مقدم مكان تالى ∴ $\frac{\text{س} + \text{ص} + \text{ع}}{\text{ص} + \text{٤ع}} = \frac{\text{٣}}{\text{١}}$

✍ مثال [١٤]

إذا كان $\frac{\text{س} + \text{ص}}{٢٠} = \frac{\text{س} + \text{ص} - \text{ع}}{٥} = \frac{\text{س} - \text{ص} + \text{ع}}{١١}$ **اثبت أن :** $\frac{\text{س}}{٨} = \frac{\text{ص}}{١٢} = \frac{\text{ع}}{١٥}$

بجمع مقدمات وتوالى النسبتين الثانية والثالثة

$$\frac{\text{س} + \text{ص} - \text{ع} + \text{س} - \text{ص} + \text{ع}}{٥ + ١١} = \frac{٢\text{س}}{١٦} = \frac{\text{س}}{٨} = \text{م} \quad .... (١)$$

بضرب حدى النسبة الأولى × (− ٢) وجمع مقدمات وتوالى النسب الثلاثة

$$\therefore \frac{-٢\text{س} - ٢\text{ص} + \text{س} + \text{ص} - \text{ع} + \text{س} - \text{ص} + \text{ع}}{-٤٠ + ٥ + ١١} = \frac{-٢\text{ص}}{-٢٤} = \frac{\text{ص}}{١٢} = \text{م} \quad .... (٢)$$

بضرب حدى النسبة الأولى × (− ١) وجمع مقدمات وتوالى النسب الثلاثة

$$\therefore \frac{-\text{س} - \text{ص} + \text{س} + \text{ص} - \text{ع} + \text{س} - \text{ص} + \text{ع}}{-٢٠ + ٥ + ١١} = \frac{\text{ع}}{١٥} = \text{م} \quad .... (٣)$$

من (١) ، (٢) ، (٣) $\therefore \frac{\text{س}}{٨} = \frac{\text{ص}}{١٢} = \frac{\text{ع}}{١٥}$

✍ مثال [١٥]

إذا كان $\frac{\text{س} + \text{ص}}{٥} = \frac{\text{ص} + \text{ع}}{٦} = \frac{\text{س} + \text{ع}}{٣}$ **أوجد النسب** س : ص : ع **ثم أوجد قيمة** $\frac{٣\text{س} - \text{ص} + \text{ع}}{٢\text{ص} - ٧\text{س}}$

بضرب حدى النسبة الثانية × (− ١) وجمع مقدمات وتوالى النسب الثلاثة

$$\frac{\text{س} + \text{ص} - \text{س} - \text{ع} + \text{ع} + \text{س}}{٥ - ٦ + ٣} = \frac{٢\text{س}}{٢} = \frac{\text{س}}{١} = \text{م} \quad .... (١)$$

بضرب حدى النسبة الثالثة × (− ١) وجمع مقدمات وتوالى النسب الثلاثة

$$\therefore \frac{\text{س} + \text{ص} + \text{ص} + \text{ع} - \text{ع} - \text{س}}{٥ + ٦ - ٣} = \frac{٢\text{ص}}{٨} = \frac{\text{ص}}{٤} = \text{م} \quad .... (٢)$$

بضرب حدى النسبة الأولى × (− ١) وجمع مقدمات وتوالى النسب الثلاثة

$$\frac{-\text{س} - \text{ص} + \text{ص} + \text{ع} + \text{ع} + \text{س}}{-٥ + ٦ + ٣} = \frac{٢\text{ع}}{٤} = \frac{\text{ع}}{٢} = \text{م} \quad .... (٣)$$

من (١) ، (٢) ، (٣)

$$\therefore \frac{\text{س}}{١} = \frac{\text{ص}}{٤} = \frac{\text{ع}}{٢} = \text{م}$$

$\therefore$ س : ص : ع = ١ : ٤ : ٢ $\quad\quad \therefore$ س = م ، ص = ٤م ، ع = ٢م

$$\text{قيمة } \frac{٣\text{س} - \text{ص} + \text{ع}}{٢\text{ص} - ٧\text{س}} = \frac{٣(\text{م}) - ٤\text{م} + ٢\text{م}}{٢(٤\text{م}) - ٧\text{م}} = \frac{\text{م}}{٨\text{م} - ٧\text{م}} = \frac{\text{م}}{\text{م}} = ١$$

تمارين على خواص التناسب



[١] أكمل ما يأتي :

❶ $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د} = \frac{٣}{٥}$ فإن $\frac{أ + جـ}{ب + د} = ...$

❷ $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د} = \frac{هـ}{و} = \frac{٢}{٧}$ فإن $\frac{أ - ٢جـ + هـ}{ب - ٢د + و} = ...$

❸ $\frac{س}{٦} = \frac{ص}{٥} = \frac{ع}{٤} = \frac{......}{١١} = \frac{٢ص - ع}{......} = \frac{٣س - ٥ص + ٤ع}{......}$

❹ إذا كان : $\frac{س}{٣} = \frac{ص}{٧} = \frac{ع}{٥} = \frac{س + ص + ع}{......} = \frac{٢س + ص}{......}$

❺ إذا كان : $\frac{س + ص}{٥} = \frac{ص + هـ}{٣} = \frac{هـ + س}{٦}$ فإن $\frac{س - هـ}{٢} = \frac{ص - س}{......}$

❻ إذا كان : $\frac{٤}{س} = \frac{٧}{ص} = \frac{أ}{ص - س}$ فإن : أ = ...

❼ $\frac{ل}{٣} = \frac{م}{٨} = \frac{ل + \frac{١}{٢}م}{......}$

❽ إذا كان : $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د} = \frac{هـ}{و}$ فإن $\frac{٥أ + ٣جـ + ...}{٥ب + ... + ٤و} = \frac{أ}{ب}$

❾ $\frac{س}{٥} = \frac{ص}{٣}$ فإن $\frac{٢س - ص}{س + ٢ص} = ...$

❿ $\frac{أ}{٥} = \frac{ب}{٢}$ فإن $\frac{٣أ - ب}{......} = \frac{أ + ب}{......}$

⓫ $\frac{أ}{٢} = \frac{ب}{٣} = جـ$ فإن $\frac{أ + ب + جـ}{......} = \frac{٢أ + ب}{......}$

⓬ $\frac{أ - ب}{٧} = \frac{أ + ب}{٥}$ فإن ب : أ = ...

⓭ إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ فإن $\frac{أ + ...}{...... + ٥د} = \frac{أ}{ب}$

⓮ إذا كان : $\frac{س + ص}{٧} = \frac{س + ع}{٥} = \frac{ع + ص}{٣}$ فإن $\frac{ع}{ص} = ...$

⓯ $\frac{٢أ + جـ}{٢ب - أ} = \frac{أ - جـ}{أ - ٣ب} = \frac{١}{٢}$ فإن $\frac{أ}{ب} = ...$

⓰ $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{أ - جـ} = \frac{أ + ب}{جـ}$ فإن أ : ب : جـ = ...

⓱ إذا كان : $\frac{أ}{٢} = \frac{ب}{٣} = \frac{٥أ - ٥ب}{جـ}$ فإن جـ = ...

⓲ إذا كان : $\frac{س}{٢} = \frac{ص}{٣}$ فإن : (٣س − ٢ص + ٥) = ...

⓳ إذا كان : ٢ ، (أ − ٢) ، ١٢ ، ١٦ كميات متناسبة فإن أ = ...

⓴ $\frac{٢س}{٥} = \frac{ص}{٣} = \frac{٢س - ص}{ب}$ فإن ب = ...



[٢] اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

❶ إذا كان : $\frac{س}{٥} = \frac{ص}{٤} = \frac{س + ص}{م}$ فأن م = ...

(أ) ٩− (ب) ١− (جـ) ١ (د) ٩

❷ $\frac{س}{٢} = \frac{ص}{٣}$ فأن $\frac{س + ص}{٢س − ص} = $ ....

(أ) $\frac{٢}{٣}$ (ب) $\frac{٣}{٢}$ (جـ) ٥ (د) $\frac{١}{٥}$

❸ إذا كان $\frac{س + ص}{٧} = \frac{ص + ع}{٥} = \frac{س + ع}{٣}$ فأن $\frac{ص}{ع} = $ ....

(أ) $\frac{١}{٩}$ (ب) $\frac{١}{٧}$ (جـ) ٧ (د) ٩

❹ $\frac{س}{ص} = \frac{ع}{ل} = \frac{٣}{٥}$ فأن $\frac{ص − ل}{س − ع} = $ ....

(أ) $\frac{٢}{٥}$ (ب) $\frac{٥}{٣}$ (جـ) $\frac{٢}{٣}$ (د) $\frac{٣}{٢}$

❺ $\frac{أ}{٦} = \frac{ب}{٥} = \frac{جـ}{٤} = \frac{٢أ + ب − جـ}{س}$ فأن س = ...

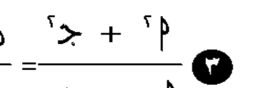
(أ) ١٢ (ب) ١٧ (جـ) ٢١ (د) ٩

❻ إذا كان : $\frac{س + ص}{٧} = \frac{ص}{٣} = \frac{س}{جـ}$ فأن جـ = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

[٣] إذا كان : أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة فاثبت أن:

❶ $\frac{٢أ + ٣جـ}{٢ب + ٣د} = \frac{أ − ٢جـ}{ب − ٢د}$ ❷ $\frac{٣أ − ٢جـ}{٥أ + ٣جـ} = \frac{٣ب − ٢د}{٥ب + ٣د}$ ❸ $\frac{أ^{٢} + جـ^{٢}}{أب + جـد} = \frac{أ}{ب}$



[٤] إذا كان : $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د} = \frac{هـ}{و}$ فاثبت أن :

❶ $\frac{٢أ − ٣جـ}{٢ب − ٣د} = \frac{جـ + ٧هـ}{د + ٧و}$ ❷ $\frac{٣أ − ٤جـ + هـ}{٣ب − ٤د + و} = \frac{أ + ٤هـ}{ب + ٤و}$

[٥] إذا كان $\frac{أ}{٢} = \frac{ب}{٣} = \frac{جـ}{٤}$ فاثبت أن ٢أ − ٥ب + ٣جـ = إحدى النسب .



[٦] إذا كان : $\frac{أ}{٣} = \frac{ب}{٥} = \frac{جـ}{٤} = \frac{٢أ - ب + ٥جـ}{٧س}$ فأوجد قيمة س

[٧] إذا كان : $\frac{أ}{٤س + ص} = \frac{ب}{س - ٤ص}$ أثبت أن : $\frac{أ + ب}{٥س - ٣ص} = \frac{أ - ب}{٣س + ٥ص}$

[٨] إذا كان : $\frac{س}{أ - ب + جـ} = \frac{ص}{ب - جـ + أ} = \frac{ع}{جـ - أ + ب}$ أثبت أن $\frac{س + ص}{أ} = \frac{ص + ع}{ب} = \frac{ص + ع}{جـ}$

[٩] إذا كان : $\frac{س}{٢أ - ب} = \frac{ص}{٢ب - جـ} = \frac{ع}{٢جـ - أ}$ أثبت أن : $\frac{س + ٢ع}{٤جـ - ب} = ٤س + ٢ص + ع$

[١٠] إذا كان : $\frac{أ}{س + ٢ص} = \frac{ب}{٢ص + ٣ع} = \frac{جـ}{٣ع + س}$ فأثبت أن : $\frac{أ - ب}{س - ٣ع} = \frac{أ - ب + جـ}{٢س}$

[١١] إذا كان : $\frac{أ}{س + ص} = \frac{ب}{س - ص}$ أثبت أن : $\frac{أ + ب}{أ - ب} = \frac{س}{ص}$

[١٢] إذا كان : $\frac{أ}{س + ٢ص} = \frac{ب}{٢ص + ٣ع} = \frac{جـ}{٣ع + س}$: أثبت أن $\frac{أ - ب}{س - ٣ع} = \frac{أ - ب + جـ}{٢س}$

[١٣] إذا كان : $\frac{س}{٢أ + ب} = \frac{ص}{٢ب - جـ} = \frac{ع}{٢جـ - أ}$: أثبت أن $\frac{٢س + ص}{٤أ + ٤ب - جـ} = \frac{٢س + ٢ص + ع}{٣أ + ٦ب}$

[١٤] إذا كان : $\frac{أ}{س - ص + ع} = \frac{ب}{س + ص - ع} = \frac{جـ}{ص + ع - س}$ أثبت أن : كل نسبة تساوى $\frac{أس + ب ص + جـ ع}{س^٢ + ص^٢ + ع^٢}$

[١٥] إذا كان : $\frac{س + ع}{ص} = \frac{ع}{س} = \frac{س}{ع - ص}$

أثبت أن : ① كل النسب = ٢ بشرط أن $س + ع \neq ٠$ ② $ع = ٢س$ ، $٣س = ٢ص$

[١٦] إذا كان : $\frac{أ}{٤أ - ٢ب} = \frac{ب}{٣جـ - أ} = \frac{جـ}{٥ب}$

أثبت أن : ① كل نسبة $= \frac{١}{٣}$ حيث أ + ب + جـ ثم أثبت أن : $٣جـ = ٥ب$

[١٧] إذا كان : س ، ص ، ع ، ك كميات متناسبة . أثبت أن : $\frac{س^ن - ع^ن}{س^ن + ع^ن} = \frac{ص^ن - ك^ن}{ص^ن - ك^ن}$ حيث $ن \in ص^+$



[١٨] إذا كان : $\frac{س + ص}{١٩} = \frac{ص + ع}{٧}$ أثبت أن : $\frac{س + ٢ص + ع}{١٣} = \frac{س - ع}{٦}$

[١٩] إذا كان : $\frac{أ + ٣ب}{س + ٥ص} = \frac{٣ب + ٥جـ}{٥ص + ٧ع} = \frac{٥جـ + أ}{٧ع + س}$ أثبت أن $\frac{أ}{٣ب} = \frac{س}{٥ص}$

[٢٠] إذا كان : $\frac{س + ص}{٥} = \frac{ص + ع}{٣} = \frac{ع + س}{٦}$ أثبت أن : $\frac{س - ع}{س + ص + ع} = \frac{٢}{٧}$

[٢١] إذا كان : $\frac{س + ص}{٣} = \frac{ص + ع}{٥} = \frac{ع + س}{٦}$ أثبت أن : $\frac{س + ص + ع}{٢س + ٣ص + ٣ع} = \frac{٧}{١٩}$

[٢٢] إذا كان : $\frac{س + ص}{٥} = \frac{ص + ع}{٧} = \frac{ع + س}{٨}$ أثبت أن : $\frac{٣س + ٢ص + ٥ع}{س + ص + ع} = \frac{١٩}{٥}$

[٢٣] إذا كان : $\frac{س + ص}{٣} = \frac{ص + ع}{٢} = ع + س$ أثبت أن $\frac{س - ص + ع}{٣} = \frac{ص}{٢}$

[٢٤] إذا كان : $\frac{س + ص}{٣} = \frac{ص + ع}{٥} = \frac{ع + س}{٦}$ أثبت أن : $\frac{س}{٢} = ص = \frac{ع}{٤}$

[٢٥] إذا كان : $\frac{س + ص}{٢٥} = \frac{س - ص}{١١} = \frac{س + ص - ع}{٨}$ أثبت أن س : ص : ع = ١٨ : ٧ : ١٧

[٢٦] إذا كان : $\frac{٢س + ص}{س} = \frac{٤ص + ع}{ص} = \frac{٣س + ٤ع}{ع}$ أثبت أن س : ص : ع = ١ : ٣ : ٣ ثم أثبت أن $\frac{٢س + ص + ع}{٣س - ص + ٢ع} = \frac{٤}{٣}$

[٢٧] إذا كان : $\frac{٢س}{٣} = \frac{٤ص}{١٧} = \frac{س - ٢ص}{٧ب}$ فأوجد قيمة ب

[٢٨] إذا كان : $\frac{أ}{س + ص} = \frac{ب}{س - ٢ص} = \frac{٢أ + ب}{٩}$ فما قيمة س

[٢٩] إذا كان : $\frac{أ}{٢} = \frac{٣ب}{٥} = \frac{٢أ + ٣ب}{٣جـ}$ أوجد قيمة جـ

[٣٠] إذا كان : $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{أ - جـ} = \frac{أ + ب}{جـ}$ أثبت أن أ : ب : جـ = ٤ : ٢ : ٣

التناسب المتسلسل

تعريف : يقال للكميات ٢ ، ب ، جـ ، ء أنها فى تناسب متسلسل إذا كان

$\frac{٢}{ب} = \frac{ب}{جـ} = \frac{جـ}{ء} = م$ حيث م ثابت لا يساوى صفر ∴ جـ = ء م ، ب = ء $م^٢$ ، ٢ = ء $م^٣$

يسمى ٢ الأول المتناسب ، ب وسط متناسب , جـ ثالث متناسب ، ب وسط هندسى بين ٢ , جـ

ملاحظات هامة :

❶ ٢ , ب , جـ كميات متناسبة ∴ $\frac{٢}{ب} = \frac{ب}{جـ}$ ∴ $ب^٢$ = ٢ جـ

أى أن ب = ± $\sqrt{٢ جـ}$ (الكميتان ٢ , جـ يجب أن يكون لهما نفس الإشارة)

أى أن الوسط المتناسب بين كميتين = ± حاصل ضرب الكميتين

❷ إذا كان $\frac{٢}{ب} = \frac{ب}{جـ} = م$ فأن ٢ = جـ $م^٢$ ، ب = جـ م

❸ إذا كانت ٢ , ب , جـ , ء كميات فى تناسب متسلسل فأن :

$\frac{٢}{ب} = \frac{ب}{جـ} = \frac{جـ}{ء} = م$ فأن ٢ = ء $م^٣$ ، ب = ء $م^٢$ جـ = ء م

✍ مثال [١]

أوجد الوسط المتناسب بين ٣ ، ٢٧

الحل بفرض أن الوسط المتناسب هو س ∴ ٣ ، س ، ٢٧ متناسبة

∴ $\frac{٣}{س} = \frac{س}{٢٧}$ ∴ $س^٢$ = ٨١ ∴ س = ±٩

✍ مثال [٢]

أوجد الوسط المتناسب بين ٣ ٢ $ب^٤$ ، ٧٥ $٢^٣$ $ب^٢$

الحل بفرض أن الوسط المتناسب هو س ∴ ٣ ٢ $ب^٤$ ، س ، ٧٥ $٢^٣$ $ب^٢$ متناسبة

$\frac{٣ ٢ ب^٤}{س} = \frac{س}{٧٥ ٢^٣ ب^٢}$

$س^٢$ = ٣ ٢ $ب^٤$ × ٧٥ $٢^٣$ $ب^٢$ = ٢٥ $٢^٤$ $ب^٦$ س = ±١٥ $٢^٢$ $ب^٣$

✍ مثال [٣]

أوجد الثالث المتناسب بين ٦ ، ١٨

الحل بفرض أن الثالث المتناسب هو س ∴ ٦ ، ١٨ ، س متناسبة ∴ $\frac{٦}{١٨} = \frac{١٨}{س}$

∴ ٦س = ١٨ × ١٨ ∴ ٦س = ٣٢٤ ∴ س = $\frac{٣٢٤}{٦}$ ∴ س = ٥٤

✍ مثال [٤]

أوجد الثالث المتناسب بين ٢ ، ٢ب

الحل بفرض أن الثالث المتناسب هو س ∴ ٢ ، ٢ب ، س متناسبة

∴ $\frac{٢}{٢ب} = \frac{٢ب}{س}$ ∴ ٢ س = ٢^٢ ب^٢ ∴ س = $\frac{٢^٢ ب^٢}{٢}$ ∴ س = ٢ ب^٢

✍ مثال [٥]

إذا كانت ٢ ، ب ، جـ كميات متناسبة اثبت أن $\left(\frac{٢ - ب}{ب - جـ}\right)^٢ = \frac{٢}{جـ}$

الحل ٢ ، ب ، جـ كميات متناسبة ∴ $\frac{٢}{ب} = \frac{ب}{جـ} = م$ ∴ ٢ = جـ م^٢ ، ∴ ب = جـ م

الأيمن = $\left(\frac{٢ - ب}{ب - جـ}\right)^٢ = \left(\frac{جـ م^٢ - جـ م}{جـ م - جـ}\right)^٢ = \left(\frac{جـ م (م - ١)}{جـ (م - ١)}\right)^٢ = م^٢$

الأيسر = $\frac{٢}{جـ} = \frac{جـ م^٢}{جـ} = م^٢$ ∴ الطرفان متساويان

✍ مثال [٦]

إذا كانت ٢ ، ب ، جـ كميات متناسبة اثبت أن $\frac{٢^٢ - ٥ ب^٢}{ب^٢ - ٥ جـ^٢} = \frac{٢^٢}{ب^٢}$

الحل ٢ ، ب ، جـ كميات متناسبة $\frac{٢}{ب} = \frac{ب}{جـ} = م$ ٢ = جـ م^٢ ، ب = جـ م

الطرف الأيمن = $\frac{٢^٢ - ٥ ب^٢}{ب^٢ - ٥ جـ^٢} = \frac{(جـ م^٢)^٢ - ٥ (جـ م)^٢}{(جـ م)^٢ - ٥ جـ^٢} = \frac{جـ^٢ م^٤ - ٥ جـ^٢ م^٢}{جـ^٢ م^٢ - ٥ جـ^٢} = \frac{جـ^٢ م^٢ (م^٢ - ٥)}{جـ^٢ (م^٢ - ٥)} = م^٢$

الأيسر = $\frac{٢^٢}{ب^٢} = \frac{جـ م^٢}{جـ} = م^٢$ الطرفان متساويان

✍ مثال [٧]

إذا كانت أ ، ب ، جـ كميات متناسبة اثبت أن $\dfrac{\text{أ}^2+\text{ب}^2}{\text{ب}^2+\text{جـ}^2} = \dfrac{\text{أ}^2}{\text{ب}^2}$

الحل

أ ، ب ، جـ كميات متناسبة $\dfrac{\text{أ}}{\text{ب}} = \dfrac{\text{ب}}{\text{جـ}} = \text{م}$ $\text{أ} = \text{جـ م}^2$ ، $\text{ب} = \text{جـ م}$

الطرف الأيمن $= \dfrac{\text{أ}^2+\text{ب}^2}{\text{ب}^2+\text{جـ}^2} = \dfrac{(\text{جـ م}^2)^2+(\text{جـ م})^2}{(\text{جـ م})^2+\text{جـ}^2} = \dfrac{\text{جـ}^2\text{م}^4+\text{جـ}^2\text{م}^2}{\text{جـ}^2\text{م}^2+\text{جـ}^2} = \dfrac{\text{جـ}^2\text{م}^2(\text{م}^2+1)}{\text{جـ}^2(\text{م}^2+1)} = \text{م}^2$

الأيسر $= \dfrac{\text{أ}^2}{\text{ب}^2} = \dfrac{(\text{جـ م}^2)^2}{\text{جـ}^2\text{م}^2} = \dfrac{\text{جـ}^2\text{م}^4}{\text{جـ}^2\text{م}^2} = \text{م}^2$

✍ مثال [٨]

إذا كانت أ ، ب ، جـ كميات متناسبة اثبت أن $\dfrac{\text{أ}^2-3\text{أ ب}+\text{ب}^2}{\text{ب}^2-3\text{ب جـ}+\text{جـ}^2} = \dfrac{\text{أ}}{\text{جـ}}$

الحل

أ ، ب ، جـ كميات متناسبة $\dfrac{\text{أ}}{\text{ب}} = \dfrac{\text{ب}}{\text{جـ}} = \text{م}$ $\text{أ} = \text{جـ م}^2$ ، $\text{ب} = \text{جـ م}$

الطرف الأيمن $= \dfrac{\text{أ}^2-3\text{أ ب}+\text{ب}^2}{\text{ب}^2-3\text{ب جـ}+\text{جـ}^2} = \dfrac{(\text{جـ م}^2)^2-3(\text{جـ م}^2)(\text{جـ م})+(\text{جـ م})^2}{(\text{جـ م})^2-3(\text{جـ م})(\text{جـ})+\text{جـ}^2}$

$= \dfrac{\text{جـ}^2\text{م}^4-3\text{جـ}^2\text{م}^3+\text{جـ}^2\text{م}^2}{\text{جـ}^2\text{م}^2-3\text{جـ}^2\text{م}+\text{جـ}^2} = \dfrac{\text{جـ}^2\text{م}^2(\text{م}^2-3\text{م}+1)}{\text{جـ}^2(\text{م}^2-3\text{م}+1)} = \text{م}^2$

الأيسر $= \dfrac{\text{أ}}{\text{جـ}} = \dfrac{\text{جـ م}^2}{\text{جـ}} = \text{م}^2$ ∴ الطرفان متساويان

✍ مثال [٩]

إذا كانت ب وسط متناسب بين أ ، جـ اثبت أن $\frac{أ^2}{ب^2} + \frac{ب^2}{جـ^2} = \frac{2أ}{جـ}$

الحل

أ ، ب ، جـ كميات متناسبة $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ} = م$ $أ = جـ م^2$ ، $ب = جـ م$

الطرف الأيمن $= \frac{أ^2}{ب^2} + \frac{ب^2}{جـ^2} = \frac{(جـ م^2)^2}{(جـ م)^2} + \frac{(جـ م)^2}{جـ^2} = \frac{جـ^2 م^4}{جـ^2 م^2} + \frac{جـ^2 م^2}{جـ^2} = م^2 + م^2 = 2م^2$

الأيسر $= \frac{2أ}{جـ} = \frac{2جـ م^2}{جـ} = 2م^2$ الطرفان متساويان

✍ مثال [١٠]

إذا كانت ب وسط متناسب بين أ ، جـ اثبت أن $\frac{أ + ب + جـ}{أ^{-1} + ب^{-1} + جـ^{-1}} = ب^2$

الحل

أ ، ب ، جـ كميات متناسبة $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ} = م$ $أ = جـ م^2$ ، $ب = جـ م$

الطرف الأيمن $= \frac{أ + ب + جـ}{أ^{-1} + ب^{-1} + جـ^{-1}} = \frac{جـ م^2 + جـ م + جـ}{جـ^{-1} م^{-2} + جـ^{-1} م^{-1} + جـ^{-1}}$

$= \frac{جـ(م^2 + م + 1)}{جـ^{-1}(م^{-2} + م^{-1} + 1)} = \frac{جـ^2(م^2 + م + 1)}{(م^{-2} + م^{-1} + 1)}$ بالضرب × $\frac{م^2}{م^2}$

$= \frac{جـ^2 م^2(م^2 + م + 1)}{م^2(م^{-2} + م^{-1} + 1)} = \frac{جـ^2 م^2(م^2 + م + 1)}{(م^2 + م + 1)} = جـ^2 م^2$

الأيسر $= ب^2 = جـ^2 م^2$ الطرفان متساويان

✍ مثال [١١]

إذا كانت أ ، ب ، جـ ، د كميات فى تناسب متسلسل اثبت أن $\frac{\text{أ} + \text{ب} + \text{جـ}}{\text{أ} - \text{د}} = \frac{\text{أ} - \text{ب}}{\text{أ} - ٢\text{ب} + \text{جـ}}$

الحـل

أ ، ب ، جـ كميات متناسبة $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{ب}}{\text{جـ}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}} = \text{م}$ ، $\text{أ} = \text{د}\text{م}^٣$ ، $\text{ب} = \text{د}\text{م}^٢$ ، $\text{جـ} = \text{د}\text{م}$

الطرف الأيمن $= \frac{\text{أ} + \text{ب} + \text{جـ}}{\text{أ} - \text{د}} = \frac{\text{د}\text{م}^٣ + \text{د}\text{م}^٢ + \text{د}\text{م}}{\text{د}\text{م}^٣ - \text{د}} = \frac{\text{د}\text{م}(\text{م}^٢ + \text{م} + ١)}{\text{د}(\text{م}^٣ - ١)} =$

$= \frac{\text{م}(\text{م}^٢ + \text{م} + ١)}{(\text{م} - ١)(\text{م}^٢ + \text{م} + ١)} = \frac{\text{م}}{\text{م} - ١}$

الأيسر $= \frac{\text{أ} - \text{ب}}{\text{أ} - ٢\text{ب} + \text{جـ}} = \frac{\text{د}\text{م}^٣ - \text{د}\text{م}^٢}{\text{د}\text{م}^٣ - ٢\text{د}\text{م}^٢ + \text{د}\text{م}} = \frac{\text{د}\text{م}^٢(\text{م} - ١)}{\text{د}\text{م}(\text{م}^٢ - ٢\text{م} + ١)} = \frac{\text{م}(\text{م} - ١)}{(\text{م} - ١)(\text{م} - ١)} = \frac{\text{م}}{\text{م} - ١}$

الطرفان متساويان

✍ مثال [١٢]

إذا كانت أ ، ب ، جـ ، د كميات فى تناسب متسلسل اثبت أن $\frac{\text{جـ}^٢ - \text{د}^٢}{\text{أ} - \text{جـ}} = \frac{\text{ب}\text{د}}{\text{أ}}$

الحـل

أ ، ب ، جـ كميات متناسبة $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{ب}}{\text{جـ}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}} = \text{م}$ ، $\text{أ} = \text{د}\text{م}^٣$ ، $\text{ب} = \text{د}\text{م}^٢$ ، $\text{جـ} = \text{د}\text{م}$

الأيمن $= \frac{\text{جـ}^٢ - \text{د}^٢}{\text{أ} - \text{جـ}} = \frac{\text{د}^٢\text{م}^٢ - \text{د}^٢}{\text{د}\text{م}^٣ - \text{د}\text{م}} = \frac{\text{د}^٢(\text{م}^٢ - ١)}{\text{د}\text{م}(\text{م}^٢ - ١)} = \frac{\text{د}}{\text{م}}$

الأيسر $= \frac{\text{ب}\text{د}}{\text{أ}} = \frac{\text{د}\text{م}^٢ \times \text{د}}{\text{د}\text{م}^٣} = \frac{\text{د}}{\text{م}}$ الطرفان متساويان

✍ مثال [١٣]

إذا كانت أ ، ب ، جـ ، د كميات فى تناسب متسلسل اثبت أن $\frac{\text{ب}^2+\text{جـ}^2+\text{د}^2}{\text{أ}^2+\text{ب}^2+\text{جـ}^2}=\frac{\text{جـ}+\text{د}}{\text{أ}+\text{ب}}$

الحـل

أ ، ب ، جـ كميات متناسبة $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}=\frac{\text{ب}}{\text{جـ}}=\frac{\text{جـ}}{\text{د}}=\text{م}$ 　 $\text{أ}=\text{د}\text{م}^3$ ، $\text{ب}=\text{د}\text{م}^2$ ، $\text{جـ}=\text{د}\text{م}$

الطرف الأيمن $=\frac{\text{ب}^2+\text{جـ}^2+\text{د}^2}{\text{أ}^2+\text{ب}^2+\text{جـ}^2}=\frac{(\text{د}\text{م}^2)^2+(\text{د}\text{م})^2+\text{د}^2}{(\text{د}\text{م}^3)^2+(\text{د}\text{م}^2)^2+(\text{د}\text{م})^2}=\frac{\text{د}^2\text{م}^4+\text{د}^2\text{م}^2+\text{د}^2}{\text{د}^2\text{م}^6+\text{د}^2\text{م}^4+\text{د}^2\text{م}^2}$

$=\frac{\text{د}^2(\text{م}^4+\text{م}^2+1)}{\text{د}^2\text{م}^2(\text{م}^4+\text{م}^2+1)}=\frac{1}{\text{م}^2}$

الأيسر $=\frac{\text{جـ}+\text{د}}{\text{أ}+\text{ب}}=\frac{\text{د}\text{م}+\text{د}}{\text{د}\text{م}^3+\text{د}\text{م}^2}=\frac{\text{د}(\text{م}+1)}{\text{د}\text{م}^2(\text{م}+1)}=\frac{1}{\text{م}^2}$ 　 الطرفان متساويان

✍ مثال [١٤]

إذا كانت أ ، ب ، جـ ، د كميات فى تناسب متسلسل اثبت أن $\frac{\text{أ}\,\text{جـ}-\text{جـ}\,\text{د}}{\text{أ}+\text{جـ}}=\frac{\text{ب}^2-\text{جـ}^2}{\text{ب}}$

الحـل

أ ، ب ، جـ كميات متناسبة $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}=\frac{\text{ب}}{\text{جـ}}=\frac{\text{جـ}}{\text{د}}=\text{م}$ 　 $\text{أ}=\text{د}\text{م}^3$ ، $\text{ب}=\text{د}\text{م}^2$ ، $\text{جـ}=\text{د}\text{م}$

الطرف الأيمن $=\frac{\text{أ}\,\text{جـ}-\text{جـ}\,\text{د}}{\text{أ}+\text{جـ}}=\frac{(\text{د}\text{م}^3)(\text{د}\text{م}^2)-\text{د}(\text{د}\text{م})}{(\text{د}\text{م}^3)+\text{د}\text{م}}=\frac{\text{د}^2\text{م}^5-\text{د}^2\text{م}}{(\text{د}\text{م}^3)+\text{د}\text{م}}=\frac{\text{د}^2\text{م}(\text{م}^4-1)}{\text{د}\text{م}(\text{م}^2+1)}$

$=\frac{\text{د}^2\text{م}(\text{م}^2-1)(\text{م}^2+1)}{\text{د}\text{م}(\text{م}^2+1)}=\text{د}(\text{م}^2-1)$

الأيسر $=\frac{\text{ب}^2-\text{جـ}^2}{\text{ب}}=\frac{(\text{د}\text{م}^2)^2-(\text{د}\text{م})^2}{\text{د}\text{م}^2}=\frac{\text{د}^2\text{م}^4-\text{د}^2\text{م}^2}{\text{د}\text{م}^2}=\frac{\text{د}^2\text{م}^2(\text{م}^2-1)}{\text{د}\text{م}^2}=\text{د}(\text{م}^2-1)$

∴ الطرفان متساويان

✍ مثال [١٥]

إذا كانت ٨ ، ب ، جـ ، ى كميات فى تناسب متسلسل اثبت أن $\frac{٨}{جـ^٣} = \frac{ب + ى}{ى(جـ^٢ + ى^٢)}$

الحـل

٨ ، ب ، جـ كميات متناسبة $\frac{٨}{ب} = \frac{ب}{جـ} = \frac{جـ}{ى} = م$ ، $٨ = ى م^٣$ ، $ب = ى م^٢$ ، $جـ = ى م$

الطرف الأيمن = $\frac{٨}{جـ^٣} = \frac{ى م^٣}{(ى م)^٣} = \frac{ى م^٣}{ى^٣ م^٣} = \frac{١}{ى^٢}$

الأيسر = $\frac{ب + ى}{ى(جـ^٢ + ى^٢)} = \frac{ى م^٢ + ى}{ى(ى^٢ م^٢ + ى^٢)} = \frac{ى(م^٢ + ١)}{ى^٣(م^٢ + ١)} = \frac{١}{ى^٢}$

الطرفان متساويان

✍ مثال [١٦]

إذا كانت ٨ ، ب ، جـ ، ى كميات فى تناسب متسلسل اثبت أن $\frac{٢٨ + ٣ى}{٣٨ - ٤ى} = \frac{٢٨^٣ + ٣ب^٣}{٣٨^٣ - ٤ب^٣}$

الحـل

٨ ، ب ، جـ كميات متناسبة $\frac{٨}{ب} = \frac{ب}{جـ} = \frac{جـ}{ى} = م$ ، $٨ = ى م^٣$ ، $ب = ى م^٢$ ، $جـ = ى م$

الطرف الأيمن = $\frac{٢ ى م^٣ + ٣ى}{٣ ى م^٣ - ٤ى} = \frac{ى(٢م^٣ + ٣)}{ى(٣م^٣ - ٤)} = \frac{٢م^٣ + ٣}{٣م^٣ - ٤}$

الأيسر = $\frac{٢٨^٣ + ٣ب^٣}{٣٨^٣ - ٤ب^٣} = \frac{٢(ى م^٣)^٣ + ٣(ى م^٢)^٣}{٣(ى م^٣)^٣ - ٤(ى م^٢)^٣} = \frac{٢ى^٣ م^٩ + ٣ى^٣ م^٦}{٣ى^٣ م^٩ - ٤ى^٣ م^٦}$

$= \frac{ى^٣ م^٦(٢م^٣ + ٣)}{ى^٣ م^٦(٣م^٣ - ٤)} = \frac{٢م^٣ + ٣}{٣م^٣ - ٤}$

الطرفان متساويان

التناسب المتسلسل

[١] الوسط المتناسب بين

❶ ٣ ، ٢٧ ❷ −٢ ، −٨ ❸ $\frac{1}{5}$ ، ١٢٥ ❹ أ ، أ ب^{2}

❺ أ^{4} ، أ^{2} ب^{2} ❻ (أ + ب)^{2} ، (أ − ب)^{2} ❼ ٤ أ^{3} ب^{2} ، ٢٥ أ ب^{8} ❽ ٥$\sqrt{3}$ أ ب ، ١٥$\sqrt{3}$ أ^{3} ب

[٢] الثالث المتناسب لكل مما يأتى

❶ ٦ ، ١٢ ❷ س^{2} ، −٥س ❸ س^{2} −٣س^{2}

❹ (أ + ب)^{2} ، (أ^{2} − ١) ❺ (٢س − ٣)^{2} ، ٤س^{2} − ٩

[٣] أوجد قيمة س التى تجعل كل من الأعداد الآتية فى تناسب متسلسل :

❶ س ، ٣ ، ٩ ❷ ٤ ، س ، ١٦ ❸ ٥ ، ١٠ ، س

❹ $\frac{1}{5}$ ، س − ١ ، ١٢٥ ❺ س ، ٨ ، س^{2} ❻ ٢ ، س + ٤ ، ١٨

[٤] أوجد العدد الذى إذا أضيف إلى كل الأعداد الآتية فأنها تكون فى تناسب متسلسل

❶ ١ ، ٤ ، ١٠ ❷ ١ ، ٣ ، ٦ ❸ ٢٢ ، ١٠ ، ٦

[٥] أوجد العدد الذى إذا طرح من كل الأعداد الآتية فأنها تكون فى تناسب متسلسل

❶ ٣ ، ٧ ، ١٩ ❷ ٩ ، ٥ ، ٣ ❸ ١٦ ، ٦ ، ١

[٦] أكمل ما يأتى :

❶ الوسط المتناسب للعددين ٢٤ ، ٦ هو.............

❷ الوسط المتناسب بين ٤ أ^{2} ، ٢٥ب^{4} هو ....

❸ الوسط المتناسب بين أ^{2} ، جـ^{2} هو ....

❹ الوسط المتناسب بين (أ + ٣) ، (أ − ٣)هو ......

❺ الوسط المتناسب بين ٣٥ ، $\frac{1}{7}$ هو ....

❻ إذا كان: ٧ ، س ، $\frac{1}{ص}$ فى تناسب متسلسل فأن : س^{2}ص = ...



❼ إذا كان ٦ هو الوسط المتناسب بين العددين ٢ ، م فأن م = ...

❽ العدد الذى يضاف لأعداد ٣ ، ٧ ، ١٣ لتصبح فى تناسب متسلسل هو ....

❾ إذا كان م ، ب ، جـ ، ء ، هـ فى تناسب متسلسل وكانت كل نسب من النسب تساوى الثابت م فأن $\frac{م}{هـ}$ = ...

❿ الثالث المتناسب للكميتين ٩ (س + ١)٢ ، ٦ (س٢ – ١) هو.............

⓫ إذا كانت ١ ، س ، ٩ ، ص فى تناسب متسلسل فأن س = ... ، ص = ...

⓬ إذا كانت ٢ ، س + ١ ، ٥٠ متناسبة حيث س ∈ ع+ فأن س = ...

⓭ إذا كان ٤ب وسط متناسب بين ٣م ، ٨جـ فأن $\frac{ب^2}{م جـ}$ = ...

⓮ إذا كان $\frac{ص}{س} = \frac{س}{ع} = \frac{٢}{٥}$ فأن ص = ... ع

⓯ إذا كان : م ، ب ، جـ كميات متناسبة فأن : $\frac{م^2 + ب^2}{ب^2 + جـ^2} = \frac{......}{جـ}$

⓰ العدد الحقيقي س الذى يجعل س + ١ ، س + ٥ ، س + ١٣ متناسبة هو ....

⓱ إذا كان : ٢ ، س + ٤ ، ١٨ كميات متناسبة ، س ∈ ع⁻ فأن س = ...

[U] اختر الإجابة الصحيحة من كلا مما يأتي :

❶ إذا كان م ، س ، ٤م ثلاث كميات متناسبة فأن قيمة س = ...

(م) ٢م (ب) –٢م (جـ) ± ٢م (ء) ٤م

❷ إذا كان م ، ب ، جـ فى تناسب فأن ....

(م) ب = م جـ (ب) ب٢ = م جـ (جـ) ب = $\frac{م}{جـ}$ (ء) ب = $\frac{جـ}{م}$

❸ الوسط المتناسب بين العددين ٣ ، ٢٧ هو ....

(م) ٨١ (ب) ٣٠ (جـ) ± ٩ (ء) ٢٤

❹ الثالث المتناسب للعددين ٩ ، –١٢ هو ....

(م) –١٦ (ب) ٨ (جـ) ١٦ (ء) ١٠٨

❺ إذا كانت : س ، ص ، ع فى تناسب وكان $\frac{س}{ص} = \frac{٣}{٧}$ فأن $\frac{س}{ع}$ = ...

(م) ٩ : ٤٩ (ب) ٤ : ٩ (جـ) ٩ : ٤ (ء) ٤٩ : ٩

❻ العدد الذى إذا أضيف إلى كل من الأعداد الآتية ١ ، ٣ ، ٧ ، ١٥ لتصبح فى تناسب متسلسل هو........

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

❼ الوسط المتناسب بين أ ، ب هو ....

(أ) أ ب (ب) $\sqrt{أ ب}$ (جـ) $-\sqrt{أ ب}$ (د) $\pm\sqrt{أ ب}$

❽ إذا كان أ ، ٢ ، ٤ ، ب فى تناسب متسلسل فأن $\frac{أ}{ب}$ = ...

(أ) $\frac{1}{16}$ (ب) $\frac{1}{8}$ (جـ) $\frac{1}{4}$ (د) $\frac{1}{2}$

❾ إذا كان أ ، ب ، جـ متناسبة فأن $\frac{أ}{جـ}$ = ...

(أ) $\frac{جـ^2}{ب^2}$ (ب) $\frac{ب^2}{جـ^2}$ (جـ) $\frac{ب^2}{أ^2}$ (د) $\frac{ب^3}{أ^3}$

❿ الوسط المتناسب بين (أ − ٢)(أ + ٢) هو ....

(أ) $\sqrt{أ+2}$ (ب) $أ^2 - 4$ (جـ) $\pm\sqrt{أ^2-4}$ (د) $\sqrt{أ^2-4}$

⓫ إذا كانت س ، ص ، ع فى تناسب متسلسل فأن س = ...

(أ) $\pm\sqrt{ص ع}$ (ب) ص ع (جـ) $\frac{ص}{ع}$ (د) $\frac{ص^2}{ع}$

⓬ العدد الذى يضاف إلى كل من الأعداد ١ ، ٣ ، ٧ ، ١٥ لتصبح متسلسل هو ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

⓭ العدد الذى يضاف لكل من الأعداد ١ ، ٣ ، ٦ لتصبح فى تناسب متسلسل هو ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

⓮ إذا كان $\frac{س}{ص} = \frac{ص}{ع} = \frac{ع}{3} = 2$ فأن س = ...

(أ) ٢٤ (ب) ٦ (جـ) ١٢ (د) ٣٦

⓯ إذا كان العدد ٩ هو الوسط المتناسب للعددين ٣ ، أ فأن أ = ...

(أ) ١٨ (ب) ٨١ (جـ) ٢٧ (د) ٩

⓰ إذا كان : $6 أ^2 ب^2$ ، ٣ أ ب ، جـ كميات متناسبة فأن جـ = ...

(أ) −٣ (ب) ٣ أ ب (جـ) $\frac{3}{2}$ (د) $\frac{2}{3}$



١٧ إذا كان $\frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{\text{ص}}{\text{ع}} = \frac{\text{ع}}{\text{ل}} = ٢$ فأن $\frac{\text{س} + \text{ص} + \text{ع}}{\text{ص} + \text{ع} + \text{ل}} =$ ....

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٨ (د) ١٦

١٨ إذا كان $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{ب}}{\text{جـ}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}} = \frac{\text{د}}{\text{هـ}} = ٢$ فأن $\frac{\text{أ}}{\text{هـ}} =$ ....

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٨ (د) ١٦

١٩ إذا كان : أ ، ٢ ، ٤ ، ب فى تناسب متسلسل فأن : أ + ب = ...

(أ) ٨ (ب) ١ (جـ) ٩ (د) ٧

[٨] إذا كان ب وسط متناسب بين أ ، جـ فاثبت أن :

١ $\frac{\text{أ}}{\text{جـ}} = \frac{\text{ب}^2}{\text{جـ}^2}$

٢ $\frac{\text{أ} - \text{ب}}{\text{أ} - \text{جـ}} = \frac{\text{ب}}{\text{ب} + \text{جـ}} = \frac{\text{أ}}{\text{أ} + \text{ب}}$

٣ $\frac{\text{أ} - \text{ب}}{\text{ب} - \text{جـ}} = \frac{\text{أ} + ٣\text{ب}}{٣\text{جـ} + \text{ب}}$

٤ $\frac{\text{أ} + \text{ب}^2}{\text{ب}^2 + \text{جـ}^2} = \frac{\text{أ}}{\text{جـ}}$

٥ $\left(\frac{\text{ب} - \text{جـ}}{\text{أ} - \text{ب}}\right)^2 = \frac{\text{جـ}}{\text{أ}}$

٦ $\frac{٢\text{جـ}^2 - ٣\text{ب}^2}{٢\text{ب}^2 - ٣\text{أ}^2} = \frac{\text{جـ}}{\text{أ}} = \frac{\text{جـ}^2}{\text{ب}^2}$

٧ $\frac{\text{أ}^3 + \text{ب}^3}{\text{ب}^3 + \text{جـ}^3} = \frac{\text{أ}(\text{أ} + \text{ب})}{\text{جـ}(\text{ب} + \text{جـ})}$

٨ $\frac{٢\text{ب}^2 - ٣\text{جـ}^2}{٢\text{أ}^2 - ٣\text{ب}^2} = \frac{٤\text{ب}^2 + ٥\text{جـ}^2}{٤\text{أ}^2 + ٥\text{ب}^2}$

٩ $\frac{\text{أ}^2 + \text{أ}\text{ب} + \text{ب}^2}{\text{ب}^2 + \text{ب}\text{جـ} + \text{جـ}^2} = \frac{\text{أ}^2 - \text{ب}^2}{\text{ب}^2 - \text{جـ}^2} = \frac{\text{أ}}{\text{جـ}}$

١٠ $\frac{\text{أ}^3 - ٤\text{ب}^3}{\text{ب}^3 - ٤\text{جـ}^3} = \frac{\text{ب}^3}{\text{جـ}^3}$

١١ $\frac{\text{أ}^2 + \text{ب}^2 + \text{جـ}^2}{\text{أ}^{-2} + \text{ب}^{-2} + \text{جـ}^{-2}} = \text{ب}^4$

١٢ $\frac{\text{أ}^3 + \text{ب}^3 + \text{جـ}^3}{\text{أ}^{-3} + \text{ب}^{-3} + \text{جـ}^{-3}} = \text{ب}^6$

[٩] اثبت أن ب وسط متناسب بين أ ، جـ

١ $\frac{\text{أ} + \text{ب}}{\text{ب} + \text{جـ}} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}}$

٢ $\frac{\text{أ} - \text{ب}}{\text{أ}} = \frac{\text{أ} - \text{جـ}}{\text{أ} + \text{ب}}$

٣ $\frac{\text{أ}^2 + \text{ب}^2}{\text{ب}^2} = \frac{\text{ب}^2 + \text{جـ}^2}{\text{جـ}^2}$

٤ $\frac{\text{ب} + ٢\text{جـ}}{٤\text{جـ}^2 + ٤\text{ب} + \text{أ}} = \frac{\text{جـ}}{\text{ب} + ٢\text{جـ}}$



[١٠] إذا كانت : أ ، ب ، جـ ، د في تناسب متسلسل فأثبت أن :

❶ $\frac{أ - ب}{ب - جـ} = \frac{٣ب + ٤جـ}{٣جـ + ٤د}$

❷ $\frac{٣أ + ٥جـ}{٣ب + ٥د} = \frac{أ - ٤جـ}{ب - ٤د}$

❸ $\frac{٣أ - ٥جـ}{أ - ب + جـ} = \frac{٣ب - ٥د}{ب - جـ + د}$

❹ $\frac{أ - د}{أ + ب + جـ} = \frac{أ - ٢ب + جـ}{أ - ب}$

❺ $\frac{٢أ + ٣جـ}{٢ب + ٣د} = \frac{أ - جـ}{ب - د}$

❻ $\frac{أ + ب}{ب + جـ} = \frac{أد + ب جـ}{٢جـ^{٢}}$

❼ $\frac{ب}{ب + د} = \frac{جـ^{٢}}{جـ^{٢} + د^{٢}}$

❽ $\frac{أ + ب}{جـ} = \frac{أب - ب جـ}{أد - ب د}$

❾ $\frac{أ}{جـ^{٣}} = \frac{ب + د}{د(جـ^{٢} + د^{٢})}$

❿ $\frac{أ^{٢} - ب^{٢}}{ب^{٢} - جـ^{٢}} = \frac{أ - ب}{جـ - د}$

⓫ $\left(\frac{أ + ب}{ب + جـ}\right)^{٢} = \frac{أ}{٢جـ} + \frac{ب}{٢د}$

⓬ $\frac{أ + د}{ب - جـ + د} = \frac{أ - جـ}{ب - جـ}$

⓭ $\frac{أ + ٥ب}{ب + ٥جـ} = \sqrt{\frac{ب}{د}}$

⓮ $\frac{أ}{د} = \frac{أ^{٢}}{ب جـ} = \frac{ب^{٣} - جـ^{٣}}{جـ^{٣} - د^{٣}}$

⓯ $\frac{أ^{٣} + ب^{٣} + جـ^{٣}}{ب^{٣} + جـ^{٣} + د^{٣}} = \frac{أ}{د}$

⓰ $أ : (ب + د) = جـ^{٢} : (جـ^{٢}د + د^{٣})$

⓱ $\frac{٢أ + ٣د}{٣أ - ٤د} = \frac{٣أ^{٢} + ٣ب^{٢}}{٣أ^{٣} - ٤ب^{٣}}$

⓲ $\frac{أ^{٢} + ب^{٢} + جـ^{٢}}{ب^{٢} + جـ^{٢} + د^{٢}} = \frac{أ + أجـ + ب}{جـ + ب د + د}$

⓳ $\frac{أ^{٢} - ٣جـ^{٢}}{ب^{٢} - ٣د^{٢}} = \frac{ب}{د}$

⓴ $\frac{أ}{ب + د} = \frac{جـ^{٣}}{جـ^{٢}د + د^{٣}}$

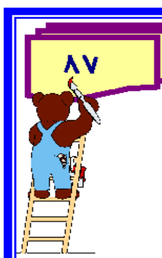
㉑ $\frac{أ^{٢} + د^{٢}}{جـ(أ + جـ)} = \frac{ب}{د} + \frac{د}{ب} - ١$

㉒ $\sqrt{\frac{أ^{٤} - ب^{٤}}{أجـ^{٣} - ب د^{٣}}} = \frac{أ^{٢} + ب^{٢}}{أجـ + ب د}$

[١١] إذا كان أ ، ٣ ، ٩ ، ب في تناسب متسلسل أوجد قيمة كل من أ ، ب

[١٢] إذا كان ٣ ، أ ، ١٢ ، ب في تناسب متسلسل أوجد قيمة كل من أ ، ب

[١٣] إذا كان : ٥أ ، ٦ب ، ٣جـ ، ٧د في تناسب متسلسل فأثبت أن : $\sqrt[٣]{\frac{٥أ}{٧د}} = \sqrt{\frac{٥أ - ٦ب}{٣جـ - ٧د}}$



الدرس الثالث

❶ التغير الطردى

❷ التغير العكسى



التغير

① التغير الطردى

يقال لأن الكمية ص تتغير طرديا بتغير الكمية س إذا تغيرت الكمية س بالزيادة أو النقص تتغير ص بنفس النسبة فى الزيادة والنقص التى تغيرت بها س ويعبر عن ذلك رياضيا : ص ∝ س وتقرأ ص تتغير طرديا" بتغير س

ملاحظات هامة :

❶ قد تحذف كلمة طرديا" ويقال أن ص تتغير تبعا" لتغير س

❷ إذا كانت ص ∝ س فإنه لدينا الآتى :

$\frac{ص_1}{ص_2} = \frac{س_1}{س_2}$ .... ① أو ص = م س .... ② حيث م ثابت ≠ صفر

❸ إذا كانت الكمية ص ∝ س بفرض ثبوت ع ، وكانت ص ∝ ع بفرض ثبوت س فإن ص ∝ س ع حينما تتغير كل من س ، ع معا"

❹ إذا كانت ص ∝ س ع فإن $\frac{ص_1}{ص_2} = \frac{س_1 ع_1}{س_2 ع_2}$

أو إذا كانت ص ∝ س ع فإن ص = م س ع حيث م ثابت

② التغير العكسي

يقال أن الكمية ص تتناسب عكسيا" مع مع الكمية س إذا كانت ص تتناسب طرديا" مع $\left(\frac{1}{س}\right)$

ويعبر عن ذلك رياضيا" فى صورة العلاقة ص ∝ $\frac{1}{س}$

ملاحظات هامة :

❶ إذا كانت ص ∝ $\frac{1}{س}$ فإن : ② ص = $\frac{م}{س}$ حيث م ثابت أو ① $\frac{ص_1}{ص_2} = \frac{س_2}{س_1}$

❷ إذا كانت ص ∝ $\frac{1}{س}$ ، ص ∝ $\frac{1}{ع}$ فإن ص ∝ $\frac{1}{س ع}$

❸ إذا كانت ص ∝ $\frac{1}{س}$ ، ص ∝ ع فإن : ص ∝ $\frac{ع}{س}$ ومنها نحصل على الآتى

① ص = م $\left(\frac{ع}{س}\right)$ حيث م ثابت لا يساوى الصفر أو ② $\frac{ص_1}{ص_2} = \frac{ع_1 س_2}{ع_2 س_1}$

مثال [١]

إذا كان ص ∝ س وكان س = ٢ عندما ص = ٦ فأوجد العلاقة بين س ، ص ثم قيمة ص عندما س = ٤

ص ∝ س ∴ ص = م س بالتعويض عن س = ٢ ، ص = ٦

∴ م(٢) = ٦ ∴ م = ٣

∴ ص = ٣ س عندما س = ٤ ∴ ص = ٣(٤) = ١٢

مثال [٢]

إذا كان : ص ∝ س^{٢} وكان س = ٤ عندما ص = ٢ فأوجد العلاقة بين س ، ص ثم قيمة س عندما ص = ٣

ص ∝ س^{٢} ∴ ص = م س^{٢} بالتعويض عن س = ٤ ، ص = ٢

∴ م(٤)^{٢} = ٢ ∴ ١٦ م = ٢ ∴ م = $\frac{١}{٨}$

∴ ص = $\frac{١}{٨}$ س^{٢} عندما ص = ٣ ∴ $\frac{١}{٨}$ س^{٢} = ٣ ∴ س^{٢} = ٢٤

∴ س = ± $\sqrt{٢٤}$ ∴ س = ± $\sqrt{٤ \times ٦}$ ∴ س = ± ٢ $\sqrt{٦}$

مثال [٣]

إذا كانت ص ∝ س^{٢} وكانت ص = $\frac{١}{٢}$ عندما س = ١ أوجد قيم ص حيث س ∈ {٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦}

∵ ص ∝ س^{٢} ∴ ص = م س^{٢} بالتعويض عن س = ١ ، ص = $\frac{١}{٢}$

∴ $\frac{١}{٢}$ = م (١)^{٢} ∴ م = $\frac{١}{٢}$ ∴ ص = $\frac{١}{٢}$ س^{٢}

∴ يمكن إيجاد قيم ص من الجدول الآتى

س	٢	٣	٤	٥
ص	٢	$\frac{٩}{٢}$	٨	$\frac{٢٥}{٢}$

مثال [٤]

إذا كان ص^{٣} ∝ س^{٢} وكان س = ٤ عندما ص = ٢ فأوجد العلاقة بين س ، ص
ثم قيمة س عندما ص = ١

الحل ∴ ص^{٣} ∝ س^{٢} ∴ ص^{٣} = م س^{٢} بالتعويض عن س = ٤ ، ص = ٢

∴ م(٤)^{٢} = (٢)^{٣} ∴ م(١٦) = ٨ ∴ م = $\frac{٨}{١٦}$

∴ م = $\frac{١}{٢}$ ∴ ص^{٣} = $\frac{١}{٢}$ س^{٢} عندما ص = ١ ∴ $\frac{١}{٢}$ س^{٢} = (٣)^{٣}

∴ $\frac{١}{٢}$ س^{٢} = ٢٧ ∴ س^{٢} = ٥٤ ∴ س = ± $\sqrt{٥٤}$

∴ س = ± $\sqrt{٩ \times ٦}$ ∴ س = ± ٣ $\sqrt{٦}$

مثال [٥]

إذا كان س ، ص متغيرين حيث ص ∝ المعكوس الضربى للمقدار $\frac{١}{س^٣}$ وأخذت ص القيمة ١٨ عندما س = ٢ فأوجد العلاقة بين س ، ص ثم أوجد قيم ص عندما س ∈ { ٠ ، ١ ، ٢ }

∵ ص ∝ المعكوس الضربى $\frac{١}{س^٣}$ ∴ ص ∝ $س^٣$

∴ ص = م $س^٣$ حيث م ثابت ∴ م $(٢)^٣$ = ١٨ ∴ ٨م = ١٨

∴ م = $\frac{١٨}{٨}$ ∴ م = $\frac{٩}{٤}$ ∴ ص = $\frac{٩}{٤}$ $س^٣$

عندما س = ٠ ∴ص = $\frac{٩}{٤}$ $س^٣$ = ∴ص = $\frac{٩}{٤}$ $(٠)^٣$ = صفر

عندما س = ١ ∴ص = $\frac{٩}{٤}$ $س^٣$ ∴ص = $\frac{٩}{٤}$ $(١)^٣$ = $\frac{٩}{٤}$

عندما س = ٢ ∴ص = $\frac{٩}{٤}$ $س^٣$ ∴ص = $\frac{٩}{٤}$ $(٢)^٣$ = $\frac{٩}{٤}$ (٨) = ١٨

مثال [٦]

إذا كان ص = ٤ + أ و كان أ ∝ س فأوجد العلاقة بين س ، ص حيث س = ٢ عندما ص = ٦ ثم أوجد قيمة ص عندما س = ٣

الحل ص = ٤ + أ ∵ أ ∝ س ∴ أ = م س

∴ص = ٤ + م س بالتعويض عن س = ٢ ، ص = ٦

∴ ٤ + م (٢) = ٦ ∴ ٢م = ٦- ٤ ∴ ٢م = ٢

∴ م = ١ ∴ ص = ٤ + س عندما س = ٣ ∴ ص = ٤ + ٣ = ٧

مثال [٧]

إذا كان مكعب س يتغير طردياً بتغير مربع ص وكانت الأزواج المرتبة (٤ ، ٣)، (١ ، ك) تنتمى لعلاقة من س إلى ص أوجد قيمة ك

∵ $س^٣$ ∝ $ص^٢$ ∴ $س^٣$ = م $ص^٢$

∴$(٤)^٣$ = م$(٣)^٢$ ∴ ٦٤ = ٩ م ∴ م = $\frac{٦٤}{٩}$

∴ $س^٣$ = $\frac{٦٤}{٩}$ ∴$(١)^٣$ = $\frac{٦٤}{٩}$ $ك^٢$ ∴ $ك^٢$ = $\frac{٩}{٦٤}$ ∴ك = ± $\frac{٣}{٨}$

مثال [٩]

إذا كان $\frac{\text{س} - \text{ص}}{\text{س} + \text{ص}} = \frac{1}{4}$ **أثبت أن** ص ∝ س

الحل

∴ ٤(س − ص) = (س + ص)

∴ ٤ س − ٤ ص = س + ص

∴ ٣ س = ٥ ص

∴ ص = م س

∴ ٤ س − ٤ ص = س + ص

∴ ٤ س − س = ص + ٤ ص

∴ ص = $\frac{3}{5}$ س

∴ ص ∝ س

مثال [١٠]

إذا كانت ص ∝ س أثبت أن : ٣ ص + ٢ س ∝ ٥ ص + ٧ س

الحل

مطلوب إثبات أن $\frac{\text{٣ ص + ٢ س}}{\text{٥ ص + ٧ س}}$ = مقدار ثابت ← (١)

∵ ص ∝ س ∴ ص = م س ← (٢) بالتعويض من (٢) في (١)

∴ $\frac{\text{٣ ص + ٢ س}}{\text{٥ ص + ٧ س}} = \frac{\text{٣ (م س) + ٢ س}}{\text{٥ (م س) + ٧ س}} = \frac{\text{س (٣م + ٢)}}{\text{س (٥م + ٧)}} = \frac{\text{٣م + ٢}}{\text{٥م + ٧}}$ = مقدار ثابت

∴ ٣ ص + ٢ س ∝ ٥ ص + ٧ س

مثال [١١]

إذا كانت ص ∝ س أثبت أن : ص² + س² ∝ ٢ س ص

الحل مطلوب إثبات أن $\frac{\text{ص}^2 + \text{س}^2}{\text{٢ س ص}}$ = مقدار ثابت ← (١)

∵ ص ∝ س ∴ ص = م س ← (٢) بالتعويض من (٢) في (١)

∴ $\frac{\text{ص}^2 + \text{س}^2}{\text{٢ س ص}} = \frac{(\text{م س})^2 + \text{س}^2}{\text{٢ س (م س)}} = \frac{\text{م}^2\text{س}^2 + \text{س}^2}{\text{٢م س}^2} = \frac{\text{س}^2(\text{م}^2 + 1)}{\text{٢م س}^2} = \frac{\text{م}^2 + 1}{\text{٢م}}$ = مقدار ثابت

∴ ص² + س² ∝ ٢ س ص

مثال [١٢]

إذا كان أ تتغير عكسى مع ب وكان أ = ١٢ عند ب = ٨ أوجد أ عند ب = ١,٥ ثم أوجد ب عند أ = ٢

الحل

أ تتغير عكسى مع ب ∵ أ ∝ $\frac{١}{ب}$ ∴ أ = $\frac{م}{ب}$ ∴ ١٢ = $\frac{م}{٨}$

∴ م = ٩٦ ∴ أ = $\frac{٩٦}{ب}$ ∴ أ عند ب = ١,٥ ∴ أ = $\frac{٩٦}{١.٥}$ = ٦٤

مثال [١٣]

إذا كانت ص تتغير عكسى مع مربع س وكان ص = $\frac{١}{٢}$ عند س = ٢ أوجد العلاقة بين س ، ص

ثم أوجد ص عند س = ٣ وأوجد قيمة س عند ص = ٠,٠٨

الحل ص تتغير عكسى مع مربع س ∵ ص ∝ $\frac{١}{س^٢}$ ∴ ص = $\frac{م}{س^٢}$ ∴ $\frac{م}{٤}$ = $\frac{١}{٢}$

∴م = ٢ ∴ ص = $\frac{٢}{س^٢}$ عند س = ٣

∴ ص = $\frac{٢}{س^٢}$ ∴ ص = $\frac{٢}{٩}$ قيمة س عند ص = ٠,٠٨ ∴ ٠,٠٨ = $\frac{٢}{س^٢}$ = $\frac{٨}{١٠٠}$

∴ ٨س^٢ = ٢٠٠ ∴ س^٢ = $\frac{٢٠٠}{٨}$ = ٢٥ ∴ س = ± ٥

مثال [١٤]

إذا كان (س ص)^٢ − ٦ س ص + ٩ = ٠ **برهن أن** ص ∝ $\frac{١}{س}$

الحل

∵ (س ص)^٢ − ٦ س ص + ٩ = ٠ ∴ (س ص − ٣) (س ص − ٣) = ٠

∴ س ص − ٣ = ٠ ∴ س ص = ٣ = ثابت ∴ ص ∝ $\frac{١}{س}$

مثال [١٥]

إذا كانت ص ∝ $\frac{١}{س}$ أكمل الجدول الآتى :

س	٢		٤	
ص	٤	٧		٢٤

الحل

∵ ص ∝ $\frac{١}{س}$ ∴ ص = $\frac{م}{س}$ ∴ ٤ = $\frac{م}{٢}$

∴م = ٨ ∴ ص = $\frac{٨}{س}$ عند ص = ٧ ∴ ٧ = $\frac{٨}{س}$

∴ ٧ س = ٨ ∴ س = $\frac{٨}{٧}$ عند ص = ٢٤ ∴ ٢٤ = $\frac{٨}{س}$

∴ ٢٤ س = ٨ ∴ س = $\frac{٨}{٢٤}$ = $\frac{١}{٣}$ عند س = ٤

∴ ص = $\frac{٨}{٤}$ = ٢

ويمكن إيجاد قيم س ، ص من الجدول الآتى

س	٢	$\frac{٨}{٧}$	٤	$\frac{١}{٣}$
ص	٤	٧	٢	٢٤

مثال [١٦]

إذا كانت ص ∝ $\frac{١}{س}$ وكانت ص = ٤ ، س = ١ **أوجد** ص **عندما** س ∈ { ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ }

الحل

∵ ص ∝ $\frac{١}{س}$ ∴ ص = $\frac{م}{س}$ ∴ ٤ = $\frac{م}{١}$

∴م = ٤ ∴ ص = $\frac{٤}{س}$

ويمكن إيجاد قيم ص من الجدول الآتى

س	٢	٣	٤	٥
ص	٢	$\frac{٤}{٣}$	١	٠,٨

مثال [١٧]

إذا كانت ص ∝ س عند ثبوت ع ، ص ∝ ع عند ثبوت س وكان ص = ٢ عند س = ٠,٦ ، ع = $\frac{١٠}{٢٧}$

أوجد س عندما ص = $\frac{١}{٢}$ ، ع = $\frac{٨}{٩}$

الحل ص ∝ س عند ثبوت ع ، ص ∝ ع عند ثبوت س

∴ ص ∝ س ع ∴ ص = م س ع

∴ م $(\frac{٦}{١٠})(\frac{١٠}{٢٧})$ = ٢ ∴ $\frac{٢}{٩}$ م = ٢ ∴ م = ٢ × $\frac{٩}{٢}$

∴ م = ٩ ∴ ص = ٩ س ع س عندما ص = $\frac{١}{٢}$ ، ع = $\frac{٨}{٩}$

ص = ٩ س ع ∴ ٩ × س × $\frac{٨}{٩}$ = $\frac{١}{٢}$ ∴ ٨س = $\frac{١}{٢}$ ∴ س = ١٦

مثال [١٨]

إذا كانت ص² ∝ س³ عند ثبوت ع ، ص ∝ $\frac{١}{ع}$ عند ثبوت س وكانت ص = ٨ عند س = ٢ ، ع = ١ أوجد العلاقة بين س ، ص ، ع ثم استنتج قيمة ص عند س = ٤,٥ ، ع = ٩

ص² ∝ س³ عند ثبوت ع ، ص² ∝ $\frac{١}{ع}$ عند ثبوت ص ∝ م س³ × $\frac{١}{ع}$

ص² = م س³ × $\frac{١}{ع}$ = $\frac{م س^٣}{ع}$ ص² = $\frac{م س^٣}{ع}$

ص = ٨ عند س = ٢ ، ع = ١

٦٤ = $\frac{م (٢)^٣}{١}$ ٨م = ٦٤   م = ٨   ص² = $\frac{٨ س^٣}{ع}$

قيمة ص عند س = ٤,٥ ، ع = ٣

ص² = $\frac{٨ (٤,٥)^٣}{٩}$ = $\frac{٧٢٩}{٩}$ = ٨١   ص = ± ٩

مثال [١٩]

إذا كان طول مستطيل (ل) يتغير عكسيا بتغير عرضة (ع) بفرض ثبوت مساحة المستطيل وكانت ل = ١٢ عندما ع = ٨سم فأوجد قيمة ل عندما ع = ٣سم

الحل ل ∝ $\frac{١}{ع}$ ل = $\frac{م}{ع}$ حيث م ثابت ل ع = م

عندما ل = ١٢ ، ع = ٨ ل ع = م م = ١٢ × ٨ = ٩٦

ل ع = ٩٦ عندما ع = ٣سم ل = $\frac{٩٦}{٣}$ = ٣٢سم

مثال [٢٠]

إذا كان مساحة سطح دائرة يتغير بتغير مربع طول نصف قطرها ، أوجد طول نصف قطر الدائرة التى مساحتها = مجموع مساحات سطوح ثلاث دوائر أنصاف أقطارها ٣سم ، ٤سم ، ١٢سم

الحل نفرض أن مساحة سطح الدائرة = ح ونصف قطرها نق

ح ∝ نق^{٢} ح = م نق^{٢} وبالتعويض فى العلاقات الثلاثة

عندما نق$_{١}$ = ٣ ح$_{١}$ = م(٣)^{٢} = ٩ م ، عندما نق$_{٢}$ = ٤ ح$_{٢}$ = م(٤)^{٢} = ١٦ م

عندما نق$_{٣}$ = ١٢ ح$_{٣}$ = م(١٢)^{٢} = ١٤٤ م

و المطلوب حساب نق عندما ح = ح$_{١}$ + ح$_{٢}$ + ح$_{٣}$ = ٩م + ١٦م + ١٤٤م = ١٦٩م م نق^{٢} = ١٦٩م

نق^{٢} = ١٦٩ نق = ١٣سم

مثال [٢١]

إذا كان عدد الأشجار اللازمة لزراعة قطعة أرض يتناسب عكسيا مع مربع المسافة بين كل شجرتين وكان عدد الأشجار ٤٣٢ عندما كانت المسافة بين كل شجرتين ١٠ متر . فاحسب عدد الأشجار اللازمة عندما تكون المسافة ١٥ متر. كذلك أوجد المسافة بين كل شجرتين إذا كان عدد الأشجار ١٠٨ شجرة

الحل نفرض أن عدد الأشجار = س و المسافة بين كل شجرتين = ف

س ∝ $\frac{١}{ف^{٢}}$ س = $\frac{م}{ف^{٢}}$ س ف^{٢} = م بالتعويض عن س = ٤٣٢ ، ف = ١٠

م = (٤٣٢)(١٠) م = ٤٣٢٠٠ س = $\frac{٤٣٢٠٠}{ف^{٢}}$

س ف^{٢} = ٤٣٢٠ عندما ف = ١٥ س = $\frac{٤٣٢٠٠}{(١٥)^{٢}}$ = ١٩٢ شجرة

عندما س = ١٠٨ ١٠٨ ف^{٢} = ٤٣٢٠٠ ف^{٢} = $\frac{٤٣٢٠٠}{١٠٨}$ ∴ ف = ٢٠ متر

مثال [٢٢]

إذا كان الربح البسيط ر لمبلغ معين مودع فى بنك بعد مدة معينة يتغير تبعا لقيمة هذا المبلغ (ق) فى بداية المدة ، ومع طول هذه المدة (ن) وعلم أن ربح مبلغ قدرة ١٠٠٠ جنيه بعد ٤ سنوات هو ١٠٠ جنية احسب ربح مبلغ قدرة ٧٠٠ جنية بعد ٣ سنوات

الحل بفرض الربح ر ، المبلغ = ق ، المدة ن

ر ∝ ن × ق ر = م × ق × ن

عندما ر = ١٠٠ يكون ق = ١٠٠٠ ، ن = ٤ سنوات

م (١٠٠٠)(٤) = ١٠٠ ٤٠٠٠ م = ١٠٠

$م = \frac{١٠٠}{٤٠٠٠}$ $م = \frac{١}{٤٠}$ ∴ $ر = \frac{١}{٤٠}$ ق × ن ∵ وعندما ق = ٧٠٠ ، ن = ٣

$ر = \frac{١}{٤٠}$ × (٧٠٠) × ٣ = ٥٢,٥ جنيه

مثال [٢٣]

إذا كان مقدار السرعة (ع) التى يخرج بها الماء من فوهة خرطوم يتغير عكسيا بتغير مربع طول نصف قطر فوهة الخرطوم نق وكانت ع = ٨سم/ث عندما نق = ١,٥سم أوجد ع عندما نق = ٦ مم .

$ع \propto \frac{١}{نق^٢}$ $ع = \frac{م}{نق^٢}$ $ع\, نق^٢ = م$

عندما ع = ٨ ، نق = ١,٥

$م = (٨)(١,٥)^٢ = ١٨$ ∴ $ع = \frac{١٨}{(٠.٦)^٢} = \frac{١٨}{٠.٣٦} = ٥٠$ متر/ثانية

مثال [٢٤]

سيارة تتغير سرعتها بمعدل منتظم قدرة جـ م/ث² فتقطع مسافة ف متر خلال زمن قدرة ن ثانية فإذا كانت ف ∝ ن² عندما تكون جـ ثابته ، ف ∝ جـ عندما تكون ن ثابتة أوجد العلاقة بين ف ، جـ ، ن إذا كانت ف = ٨جـ عندما ن = ٤ثانية

ف ∝ ن² عند ثبوت جـ ، ف ∝ جـ عند ثبوت ن

ف ∝ جـ ن² ، ف = م جـ ن² حيث م ثابت

ف = ٨ جـ عندما ن = ٤ ∴ ٨جـ = م (جـ)(٤)² بالقسمة على ٨جـ

٨جـ = ١٦م جـ $م = \frac{٨جـ}{١٦جـ} = \frac{١}{٢}$ ∴ $ف = \frac{١}{٢}$ جـ ن²

مثال [٢٥]

إذا كانت المقاومة الكهربية لسلك معدني تتغير طرديا مع طول السلك وعكسيا مع مربع طول نصف القطر و كانت المقاومة الكهربية لسلك طوله ٣٠٠سم ونصف قطر مقطعه ٠,١ سم هى ٣ أوم .احسب المقاومة لسلك طوله ٩٠٠ سم ونصف قطر مقطعه ٠,٢ سم .

بفرض أن : المقاومة ص وطول السلك = س ، نصف قطر مقطعه = نق

ص ∝ $\frac{س}{نق^٢}$ ص = $\frac{م س}{نق^٢}$ ∴ ص نق^٢ = م س حيث م ثابت

عندما ص = ٣ يكون طول السلك س = ٣٠٠ ، نق = ٠,١

٣ (٠,١)^٢ = ٣٠٠ م ٠,٠٣ = ٣٠٠م

م = $\frac{٠,٠٠٣}{٣٠٠}$ = $\frac{١}{١٠٠٠٠}$

ص نق^٢ = م س ص نق^٢ = $\frac{س}{١٠٠٠٠}$

ص = $\frac{م س}{نق^٢}$ = $\frac{١}{١٠٠٠٠}$ × $\frac{٩٠٠}{(٠,٢)^٢}$ = ٢,٢٥ أوم

مثال [٢٦]

مخروط دائري قائم يتغير حجمه بتغير مربع طول نصف قطر قاعدته عندما يكون ارتفاعه ثابتا ويتغير الحجم بتغير الارتفاع عندما يكون نصف قطر القاعدة ثابتا ، فإذا كان نصف قطر القاعدة ٧سم ، و الارتفاع ١٥سم فان الحجم يكون ٧٧٠سم^٣ أوجد ارتفاع المخروط الذى حجمه = ١٣٢سم^٣ والذى نصف قطر قاعدته = ٣سم .

ح ∝ نق^٢ عندما ع ثابت ح ∝ ع عند ثبوت نق

ح ∝ نق^{٢}ع ح = م نق^٢ ع حيث م ثابت

وعند ح = ٧٧٠ تكون نق = ٧ ، ع = ١٥

م(٧)^٢(١٥) = ٧٧٠ م(٤٩)(١٥) = ٧٧٠

م = $\frac{٧٧٠}{٤٩ \times ١٥}$ = $\frac{٢٢}{٢١}$ ح = $\frac{٢٢}{٢١}$ نق^٢ ع $\frac{٢٢}{٢١}$ (٣)^٢ ع = ١٣٢

$\frac{٢٢}{٢١}$ (٩) ع = ١٣٢ $\frac{١٩٨}{٢١}$ ع = ١٣٢ ع = $\frac{١٣٢ \times ٢١}{١٩٨}$ = ١٤سم



إذا كان ٢٤ عاملا فى مصنع يجب أن يعملوا لمدة ١٢ يوما حتى يمكنهم إنتاج ٢٠٠٠ وحدة معينة . فكم يوما من العمل يحتاجها ١٦ عاملا لإنتاج ٥٠٠٠ من نفس الوحدات السابقة .

الحل

نفرض أن : عدد الأيام = س ، عدد الوحدات = ص ، عدد العمال = ع

$س_1 = ١٢$ عندما $ص_1 = ٢٠٠٠$ ، $ع_1 = ٢٤$

$س_2 = ؟$ عندما $ص_2 = ٥٠٠٠$ ، $ع_2 = ١٦$

س $\propto$ ص عند ثبوت ع ، س $\propto \frac{١}{ع}$ عند ثبوت ص

$$س \propto \frac{ص}{ع} \qquad \frac{س_1}{س_2} = \frac{ص_1}{ص_2} \times \frac{ع_1}{ع_2} \qquad \frac{١٢}{س_2} = \frac{٢٠٠٠}{٥٠٠٠} \times \frac{١٦}{٢٤}$$

$$\frac{١٢}{س_2} = \frac{٤}{١٥} \qquad س_2 = \frac{١٢ \times ١٥}{٤} = ٤٥ \text{ يوما}$$

مثال (٢٦)

إذا كان وزن جسم على القمر (و) يتناسب طرديا مع وزنه على الأرض (ر) وإذا كان الجسم يزن ٨٤ كجم على الأرض ووزنه على القمر ١٤ كجم فما وزنه على القمر إذا كان وزنه على الأرض ١٤٤ كجم ؟

$$و \propto ر \qquad و = م ر \qquad م \times ٨٤ = ١٤$$

$$م = \frac{١٤}{٨٤} \qquad م = \frac{١}{٦}$$

العلاقة بين و ، ر هى $و = \frac{١}{٦} ر$

إذا كان وزنه على الأرض ١٤٤ كجم $و = \frac{١}{٦} \times ١٤٤ = ٢٤$ كجم



(١) أكمل ما يأتي :

❶ إذا كانت ص ∝ س فان $\frac{ص_١}{ص_٢}$ = $\frac{.....}{.....}$

❷ إذا كانت ص = (٥س)^٢ فان ص ∝ .... وثابت التناسب = ...

❸ إذا كانت ص ∝ س فان ص =..................

❹ إذا كانت ص ∝ س وكانت ص = ٢ عندما س = ٨ فان ص =..... عندما س = ١٢

❺ إذا كانت س ∝ ص وكانت س = ٤ عندما ص = ٢ فان س : ص = ...

❻ إذا كانت س ∝ ص ، ص ∝ ع فان س ∝ ....

❼ إذا كانت ص ∝ س ، ص = ٦ عندما س = ٣ فان ص = ...

❽ إذا كانت س ∝ $\sqrt{ص}$ وكانت س = ٣ عندما ص = $\frac{١}{٤}$ فان ثابت التغير = ...

(٢) اختر الإجابة الصحيحة مما يأتي

❶ إذا كانت ص = م س حيث م ثابت التناسب وكانت س = ١٢ عندما ص = ٨ فان ص =........عندما س = ٨

(أ) $\frac{٣}{٢}$ (ب) ٥ $\frac{١}{٣}$ (جـ) ١٢ (د) ١٨

❷ إذا كانت ص ∝ س^٢ وكانت س = ١ عندما ص = ٢ فان ص = ... عندما س = ٤

(أ) ٤ (ب) ١ (جـ) ٨ (د) ٣٢

❸ إذا كانت ص ∝ $\sqrt{س}$ فان $\frac{ص_١}{ص_٢}$ = $\frac{..........}{..........}$

(أ) $\frac{س_١}{س_٢}$ (ب) $\sqrt{\frac{س_١}{س_٢}}$ (جـ) $\sqrt{\frac{س_٢}{س_١}}$ (د) $\frac{س_١}{٢س_٢}$

❹ إذا كانت س ∝ ص^٢ وكانت س = ١ عندما ص = ٢ فان س = ...

(أ) $-\frac{١}{٢}$ ص^٢ (ب) $-\frac{١}{٤}$ ص^٢ (جـ) ٤ ص^٢ (د) ص^٢

❺ إذا كانت ص تتغير طرديا مع $\sqrt{س}$ وكانت ص = ٢٠ عندما س = ٢٥ فان قيمة ص = ... عندما س = ١٦

(أ) ١٦ (ب) ١٥ (جـ) ٨ (د) ٢٥

❻ إذا كانت س ∝ $\sqrt[٣]{ص}$ وكانت س = ٦ عندما ص= $\frac{١}{٨}$ فان ثابت التغير ....

(أ) ٤٨ (ب) ٢٤ (جـ) ١٢ (د) ٦

❼ إذا كانت أ^٢ + ٩ب^٢ = ١٤ أ ب فان أ ∝ ....

(أ) ب (ب) $\frac{١}{ب}$ (جـ) ب^٢ (د) $\frac{١}{ب^٢}$

❽ إذا كانت $\frac{٥س - ٣ص}{٢س - ص}$ = ١ فان س ∝ ....

(أ) ص (ب) $\frac{١}{ص}$ (جـ) ص^٢ (د) $\frac{١}{ص^٢}$

❾ إذا كانت ص ∝ (س + ٣) وكانت ص = ٦ عندما س = ٣ فان ثابت التغير = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

❿ إذا كانت ص ∝ س^٢ فأكمل الجدول التالى

س	١	٢	....	٤$\sqrt{٢}$
ص	$\frac{١}{٢}$	....	٣٢	....

✍ [٣] المجموعة الثانية

❶ إذا كانت س ، ص متغيرين حقيقيين ، ص تتناسب طرديا مع س وكانت ص = ٥ عندما س = ١ أوجد

(١) العلاقة بين س ، ص (٢) س عندما ص = ٤٠

❷ إذا كانت ص ∝ س وكانت ص = ٩ عندما س = ٣٦ أوجد :

(١) العلاقة بين س ، ص (٢) س عندما ص = ٢٠

❸ إذا كانت ص ∝ س وكانت ص = ٦ عندما س = ٣ فأوجد قيمة ص عندما س ∈ {٦ ، ٩ ، ١٥}

❹ إذا كانت ص ∝ س^{٢} وكانت ص = ٢ عندما س = ١ أوجد العلاقة بين س ، ص ثم أوجد قيمة ص عندما س = ٨

❺ إذا كانت م ∝ ب^{٢} وكانت ب = ٢٧ عندما م = ٣ أوجد :

قيمة ب عندما م = $\frac{٤}{٣}$ قيمة م عندما ب = ٧٥

❻ إذا كانت ص ∝ س^{٢} وكانت س = ١ عندما ص = ٢ فأوجد ص عندما س ∈ { ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ }

❼ إذا كانت ص ∝ س وكانت ص = $\frac{٣}{٥}$ عندما س = ٢ أوجد قيمة س عندما ص = ٣

❽ إذا كانت ل ∝ $\sqrt{م}$ وكانت ل = ١ عندما م = ١٦ أوجد قيمة م عندما ل = ٢

❾ إذا تغير مكعب س تبعا لتغير مربع ص وكانت س = ٢ عندما ص = ١ أوجد العلاقة بين س ، ص . ثم أوجد قيمة ص عندما س = ٥

❿ إذا كانت ص ∝ س عند ثبوت ع ، ص ∝ ع عند ثبوت س وكانت ص = ٦ عندما س = ٣ ، ع = ١ . أوجد قيمة ص عندما س = ١ ، ع = $\frac{١}{٢}$

⓫ إذا كانت م ∝ ب عند ثبوت جـ ، م ∝ جـ عند ثبوت ب وكانت م = ٦ عندما ب = $\frac{٣}{٢}$

أوجد قيمة م عندما ب = $\frac{٢}{٣}$ ، جـ = $\frac{٩}{٢}$

⓬ إذا كانت س ، ص ، ع ثلاث متغيرات وكان س ∝ ص^{٢} عند ثبوت ع ، س ∝ ع عند ثبوت ص وكان ع = $\frac{٣س}{٢}$ عندما ص = ٢ أوجد العلاقة بين س ، ص ، ع

المجموعة الثالثة [٤]

❶ إذا كان ٩س - ٥ص = ٧س + ص لجميع قيم س ، ص ∈ ح$^{+}$ فاثبت أن س ∝ ص

❷ إذا كانت ١٦س - ص = ٣ (٥س + ٢ص) لكل س ، ص ∈ ح فاثبت أن س ∝ ص

❸ إذا كانت $\frac{١٠س - ٣ص}{٤س + ص}$ = ٢ لكل س ، ص ∈ ح فاثبت أن س ∝ ص

❹ إذا كانت $\frac{س + ل}{٥}$ = $\frac{س - ل}{٣}$ فبرهن أن س ∝ ل

❺ إذا كان ص٢ - ٢٥س٢ = ٠ أوجد ص : س ثم اثبت أن ص ∝ س

❻ إذا كانت س٢ - ٦س ص + ٩ص٢ = ٠ اثبت أن س ∝ ص

❼ إذا كانت $\frac{س}{ص}$ ∝ (٩ + ب) ، $\frac{ص}{س}$ ∝ (٩ - ب) اثبت أن ٩٢ - ب٢ = مقدار ثابت

❽ إذا كانت ٩ ∝ (س٢ - ص٢) ، ب ∝ (س - ص) فاثبت أن $\frac{٩}{ب}$ ∝ $\frac{١}{(س + ص)}$

❾ اذا كانت ص ∝ س حيث س ، ص ∈ ح+ اثبت أن : س٢ + ص٢ ∝ س ص

❿ إذا كانت $\frac{٩}{ب}$ = $\frac{ب}{جـ}$ = $\frac{جـ}{ء}$ = ٢ وكانت ٩ س٢ + ٢ب س ص + جـ ص٢ = ٠ اثبت أن س ∝ ص

المجموعة الرابعة [٥]

❶ إذا كانت ص = ٧ + ب ، وكانت ب تتغير طرديا مع س٢ وكانت ص = ١٠ عندما س = ١ أوجد قيمة س عندما ص = ١٩

❷ إذا كانت ص = ٩ + ب حيث ٩ ثابت ، ب ∝ س وكانت ص = - ٣ عندما س = ٠ ، ص = ١ عندما س = ١

أوجد العلاقة بين س ، ص ثم أوجد قيمة ص عندما س = - ١

❸ إذا كانت ف = ٩ + ب وكانت ٩ ∝ ن ، ب ثابت وإذا كانت ف = ٨٠ متر عندما بداية الحركة ، ف = ٣٠٠ متر

عندما ن = ٢دقيقة أوجد العلاقة بين ف ، ن

❹ إذا كانت ص = ٩ + ب حيث ٩ ثابت ، ب ∝ س٢ ، ص = ٩ عندما س = ٠ ، ص = ٢٤ عندما س = ١ أوجد ص بدلالة س

المجموعة الخامسة [٦]

❶ إذا كانت أبعاد متوازى مستطيلات س ، ص ، ع وكان حجمه (ح) يتناسب طرديا مع س عند ثبوت ص ، ع ، وحجمه يتناسب مع ص عند ثبوت س ، ع وحجمه يتناسب مع ع عند ثبوت س ، ص أوجد العلاقة بين ح ، س ، ص ، ع عندما س = ١٠ سم ، ص = ٦سم ، ع = ٨سم ، حجمه = ٤٨٠سم٣

❷ اذا كانت مساحة سطح دائرة تتغير تبعا لتغير مربع طول نصف قطرها وكانت مساحة سطح الدائرة التى طول نصف قطرها ٧سم هى ١٥٤سم² فما مساحة سطح الدائرة التى طول نصف قطرها سم

❸ إذا كان حجم مخروط دائري قائم (ح) يتغير بتغير مربع طول نصف قطر قاعدته (نق) عند ثبوت ارتفاع المخروط (ع) ويتغير بتغير الارتفاع عند ثبوت نصف قطر القاعدة وكان ح = سم³ عندما ع = ١٤سم ، نق = ٣سم أوجد (ح) بدلالة نق ، ع .

❹ إذا كانت النفقات التى يصرفها أحد الملاجئ على نزلائه فى مدة ما تتكون من جزء ثابت وجزء آخر يتغير طرديا مع عدد اللاجئين وعندما يكون عدد اللاجئين ٢٥٠ فان نفقات الملجأ تساوى ١٤٥٠ جنية . أوجد نفقات الملجأ عندما يصبح اللاجئين ٣٠٠

❺ إذا كان ٧ رجال يحصدون ٣ أفدنه فى ٥ أيام فكم فداناً يحصدها ١٥ رجلاً فى أسبوعين علماً بأن عدد الأفدنة الممكن حصدها يتغير بتغير كلاً من عدد الرجال والأيام معاً .

❻ إذا كان ثمن عملة فضية تتغير طرديا مع مربع قطرها عندما يكون سمكها ثابت وطرديا مع سمكها اذا كان قطرها ثابت فإذا كان لدينا عملتين النسبة بين طولى قطريهما كنسبة ٤ : ٣ أوجد النسبة بين سمكيهما اذا كان ثمن العملة الأولى ٤ أمثال ثمن العملة الثانية .

❼ إذا كان وزن قضيب (و) يتناسب طرديا مع طوله (ل) ومربع طول نصف قطر مقطعه (نق) فاذا كان وزن القضيب = ٠٫٢٣ ث.كجم عندما ل = ١٠سم ، نق = ٠٫٤سم فأوجد العلاقة بين و ، نق ، ل ثم احسب طول القضيب عندما يكون وزنه = ٦٤٠ ث.كجم ، نق = ٠٫٢

❽ إذا كان ما تدفعه إدارة مجلة من نقود مقابل أى مقال (م) يتناسب طرديا مع عدد الكلمات فى المقال (ك) فإذا كانت المجلة تدفع ٧٢٠ جنيها لمقال من ١٢٠٠ كلمة فكم تدفع لمقال يتكون من ١٥٠٠ كلمة .

تمارين على التغير العكسي

[١] أكمل ما يأتى :

❶ إذا كانت : س ∝ ص فان : س = ...

❷ إذا كانت : س − ٢ص = ٠ فان س ∝ ....

❸ إذا كانت : ص ∝ س فان : $\frac{س_١}{س_٢}$ = $\frac{......}{......}$

❹ إذا كانت : س تتغير عكسيا مع ص فان: $\frac{س_١}{س_٢}$ = $\frac{......}{......}$

❺ إذا كانت : ص = $\frac{٢}{٧}$ س فان : ص ∝ ....

❻ إذا كانت : ص ∝ $\frac{٥}{س}$ فان : ص تتغير عكسيا مع ......

❼ إذا كانت : ع = $\frac{م}{س^٢}$ حيث م ثابت فان ع ∝ ....

❽ إذا كانت : س ∝ $\frac{١}{ص}$ فان : س = ...

❾ إذا كانت : ٥س = ٨ ص فان : ص : س = ... : ...

❿ إذا كانت : ٢س ص = ٥ فان : س ∝ ....

⓫ إذا كانت : ص ∝ س وكانت ص = ٢ عندما س = ٤ فان : ص = ... س

⓬ إذا كانت : ص ∝ $س^٢$ وكانت ص = ٥ عندما س = ١ فان ثابت التغير = ...

⓭ إذا كانت : ص ∝ س وكانت ص = ٢ عندما س = ٨ فان : ص = ... عندما س = ١٢

⓮ إذا كانت : س ص − ٥ = ٠ فان س تتغير .... بتغير ص

⓯ إذا كانت : س ∝ ص ، س = ٥ عندما ص = ٢٠ فان ثابت التناسب = ...

⓰ إذا كانت : ص تتغير عكسيا مع س س = $\sqrt{٣}$ عندما ص = $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$ فان ثابت التناسب يساوى ....

⓱ إذا كانت : ص ∝ $\frac{١}{س}$ وكانت ص = ٣ عندما س = ٢٠ فانه عندما س =١٢ فان ص = ...

⓲ إذا كانت : س ص = ٧ حيث س ، ص متغيرين حقيقيين فان ص ∝ ....

⓳ إذا كانت : ص ∝ س ، ص ∝ $\frac{١}{ع}$ فان ص ∝ ....

⓴ إذا كانت : ص ∝ $\frac{١}{س}$ وكانت ص = ٣ عندما س = ٢ فان العلاقة بين س ، ص تكون ....

㉑ إذا كانت : ص ∝ $\frac{١}{س^٢}$ وكانت ص = ٣ عندما س= ٢ فان س = ... عندما ص = ٢

㉒ إذا كانت : س ∝ $\sqrt[3]{ص^{-1}}$ وكانت س = ٦ عندما ص = $\frac{١}{٨}$ فان ثابت التناسب = ...

㉓ إذا كانت س : ص – ٤ = ٠ فان ص = ... ، ص ∝ .....

㉔ إذا كانت : $س^٢ص^٢$ + ٢٥ = ١٠ س ص فان ص ∝ ....

㉕ إذا كانت : $س^٢ص^٢$ = ٧ فان : ص ∝ ....

㉖ إذا كانت : $س^٢ص^٢$ = ١ فان : س ∝ ....

㉗ إذا كان : س ∝ المعكوس الضربى للعدد ص فان $س_١$ × .... = ... × $ص_٢$

㉘ إذا كان : س ، ص كميتان متغيرتان وكان $\frac{س_١ ص_١}{س_٢ ص_٢}$ = ١ فان : ص ∝ ....

㉙ إذا كانت : ص تتغير عكسيا مع $\sqrt{س}$ وكانت ص = ٢ عندما س = ٤ فان قيمة ص عندما س = ١٦ = ...

㉚ إذا كانت : $\frac{ص}{س^٢}$ = م حيث م ثابت فان : ص ∝ ....

㉛ إذا كانت : $س^٢$ – ٤ س ص + ٤ $ص^٢$ = ٠ فان : س ∝ ....

㉜ إذا كانت : أ ∝ $ب^٢$ ، أ ∝ $\frac{١}{جـ}$ حيث م ثابت فان $ب^٢$ = ...

[٢] اختر الإجابة الصحيحة من كل مما يأتى :

❶ إذا كانت : ٣ س ص = ٨ فان : ....

(أ) س ∝ ص (ب) ص ∝ س (جـ) ٣ س ∝ ٨ ص (د) س ∝ $\frac{١}{ص}$

❷ إذا كانت : س ∝ $ص^{-١}$ وكانت س = – ١ عند ص = ٢ فان عند س = ٢ فان ص = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

❸ إذا كانت : ص = $\frac{٦}{س^٢}$ فان ص تتناسب عكسيا مع ....

(أ) $س^{-٢}$ (ب) $س^{-١}$ (جـ) س (د) $س^٢$

❹ إذا كانت : ص تتناسب طرديا مع $س^٢$ ، ص تتناسب طرديا مع $\frac{١}{ع}$ فان ص ∝ ....

(أ) $\frac{س^٢}{ع}$ (ب) $س^٢ع$ (جـ) س ع (د) $\frac{س}{ع}$

❺ إذا كانت : إذا كان $أ^٢ب^٢$ = ٧ حيث أ ، ب متغيران حقيقيان فان ....

(أ) ب ∝ $أ^٢$ (ب) ب ∝ $\frac{١}{أ^٢}$ (جـ) ب ∝ $\frac{١}{أ}$ (د) ب ∝ أ

❻ إذا كانت : ص تتغير طرديا بتغير $\frac{1}{س}$ فان ....

(أ) ص : س = ١ (ب) ص = م س (ج) ص$_2$ س$_1$ = ص$_1$ س$_2$ (د) ص$_1$ س$_1$ = ص$_2$ س$_2$

❼ إذا كانت : التكلفة الكلية (ص) لرحلة ما بعضها ثابت (أ) و الآخر تتناسب طرديا مع عدد المشتركين س فان : ......

(أ) ص = أ س (ب) ص = أ + س

(ج) ص = أ + $\frac{م}{س}$ (حيث م ثابت) (د) ص = أ + م س (حيث م ثابت)

❽ إذا كانت : س^2 - ٦ س ص + ٩ ص^2 = ٠ فان : ....

(أ) س $\propto$ ص (ب) س $\propto$ ص^2 (ج) س $\propto \frac{1}{ص}$ (د) س $\propto \frac{1}{ص^2}$

❾ إذا كانت : العلاقة التى تمثل تغيرا طرديا بين المتغيرين ص ، س هى :

(أ) س ص = ٥ (ب) ص = س + ٣ (ج) $\frac{س}{٣} = \frac{٤}{س}$ (د) $\frac{س}{٥} = \frac{ص}{٢}$

❿ إذا كانت :ص تتغير عكسيا مع (س + ٤) وكانت ص = ٤ عندما س = ١ فان ثابت التغير = ...

(أ) $\frac{١}{٨}$ (ب) $\frac{٤}{٥}$ (ج) ٨ (د) ٢٠

⓫ إذا كانت :س ص^5 = ثابتا فان : س تتغير عكسيا مع ....

(أ) $\frac{١}{٥}$ (ب) ص^5 (ج) ص (د) ص^2

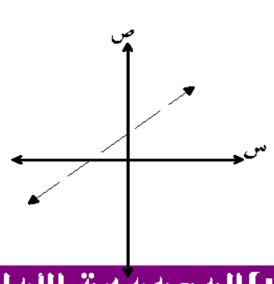
⓬ إذا كانت : ص $\propto \frac{1}{\sqrt{س}}$ فان : س تتناسب ....

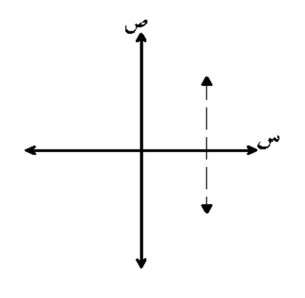
(أ) طرديا مع ص^2 (ب) عكسيا مع ص^2 (ج) عكسيا مع ص (د) عكسيا مع $\sqrt{ص}$

⓭ إذا كانت : مساحة الدائرة ع = π نق^2 فن ع $\propto$ ....

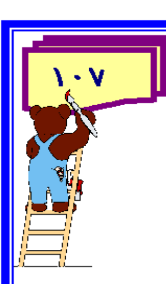
(أ) نق (ب) نق^2 (ج) π (د) π نق

⓮ إذا كانت :أى الأشكال البيانية الآتية تمثل تغيرا طرديا بين س ، ص : شكل ....





المجموعة الأولى [٣]



❶ إذا كانت ص $\propto \frac{١}{س}$ وكانت ص = ٤ عندما س = ٦ أوجد قيمة س عندما ص = ٣

❷ إذا كانت : ص $\propto \frac{١}{س}$ وكانت ص = ٣ عندما س = ٢ أوجد قيم ص عندما س ∈ { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ }

❸ إذا كانت : ص تتغير عكسيا بتغير مربع س وكانت ص = −١ عندما س = ١٠ أوجد قيمة س عندما ص = −٤

❹ إذا كانت : س $\propto \frac{١}{ص^{٢}}$ وكانت س = ٤ عندما ص = ١ . أوجد قيمة ص عندما س = ١

❺ إذا كانت : س تتغير عكسيا بتغير مكعب ص وكانت س = ١٢٥ عندما ص = ٢ فأوجد قيمة ص عندما س = ٢٧

❻ إذا كانت : ل تتغير عكسيا بتغير م وكانت ل = ٦ عندما م = $\frac{٢}{٣}$ فأوجد قيمة ل عندما م = $\frac{٤}{٥}$ قيمة م عندما ل = $\frac{٤}{٣}$

❼ إذا كانت : س تتغير بتغير مكعب ص وكانت س = $\frac{١}{٢}$ عندما ص = ٢ فأوجد العلاقة بين س ، ص

ثم أوجد قيمة ص عندما س = $\frac{١}{١٦}$

❽ إذا كانت : ص^{٢} $\propto \frac{١}{\sqrt[٣]{س}}$ وكانت س = ٨ عندما ص = ٣ أوجد قيمة س عندما ص = ١,٥

إذا كانت : س = ع + ٨ وكانت ع تتناسب عكسيا مع ص وكانت ع = ٢ عندما ص = ٣ أوجد قيمة ص عندما س = ٣

❾

❿

[٤] المجموعة الثانية

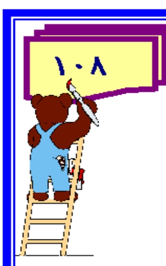
❶ إذا كانت : أ^{٢}ب^{٢} + ٤٩ = ١٤ أب حيث أ ، ب ∈ ح . اثبت أن أ $\propto \frac{١}{ب}$

❷ إذا كانت : أ^{٢}ب^{٢} + $\frac{١}{٤}$ = أ ب حيث أ ، ب ∈ ح . اثبت أن أ $\propto \frac{١}{ب}$

❸ إذا كانت: $\frac{٣س - ٢}{٢ص - ٤} = \frac{٣س - ٥}{٥ص - ٤}$ − ٤ فأثبت ان س $\propto \frac{١}{ص}$

❹ إذا كانت : س ∝ ص ، س $\propto \frac{١}{ع}$ وكانت س = ٢ عندما ص = ٧ ، ع = ٣ فما قيمة ص عندما س = ٣ ، ع = ٤

❺ إذا كانت : ص ∝ س ، ص $\propto \frac{١}{ع^{٣}}$ وكانت ص = ١٦ عندما س = ٤٩ ، ع = ٤ فما قيمة س عندما ص = ٩٦ ، ع = ٢



❻ إذا كانت : م ∝ $\sqrt{}$ب ، م ∝ $\frac{١}{جـ^٣}$ وكان م = ٣ ، ب = ٢٥٦ عندما جـ = ٢

فأوجد قيمة ب عندما م = ٢٤ ، جـ = $\frac{١}{٢}$.

❼ إذا كانت :ع ∝ س ص وكانت ع = ١٠ عندما س = ٥ ، ص = ١ فأوجد العلاقة بين س ، ص ، ع

ثم أوجد قيمة ع عندما س = ٦ ، ص = ١٢

❽ إذا كانت :ص تتناسب عكسيا مع حاصل ضرب كميتين وكانت الكمية الأولى تتناسب مع (س + ١) والثانية تتناسب مع (س − ٢) وعندما س = ٠ فان ص = ٢ أوجد ص عندما س = ٢

❾ إذا كان (س − ص) ∝ ($\frac{١}{ص}$ − $\frac{١}{س}$) فأثبت أن س تتغير عكسيا بتغير ص .

المجموعة الرابعة [٥]

❶إذا كانت :المقاومة الكهربية لسلك معدنى يتناسب طرديا مع طول السلك وعكسيا مع مربع طول نصف قطره وكانت المقاومة الكهربية لسلك طوله ٢٠٠سم ، طول نصف قطره ٠,١سم هى ٢أوم ، فأحسب المقاومة لسلك طوله ٤٠٠سم وطول نصف قطره ٠,٢سم .

❷إذا كان عدد الأشجار اللازمة لزراعة قطعة أرض يتناسب عكسيا مع مربع المسافة بين كل شجرتين وكان عدد الأشجار ١٥٠ شجرة عندما كانت المسافة بين كل شجرتين ٨ أمتار فاحسب عدد الأشجار اللازمة اذا جعلنا المسافة بين كل شجرتين ٥ أمتار .

❸إذا كان حجم الغاز ح يتناسب طرديا مع درجة الحرارة (ر) وعكسيا مع الضغط (ض) وكانت ح = ٤٠عندما ر = ٣٠ ، ض = ٨٠ فأوجد قيمة الضغط عندما ح = ٨٠ ، ر = ١٢٠

❹إذا كان ارتفاع مثلث يتغير طرديا بتغير المساحة وعكسيا بتغير طول قاعدته وكان ارتفاع المثلث الذى مساحة سطحه ٢,٧ متر مربع وطول قاعدته ٦ أمتار يساوى ٩٠سم^٢ ، فما هو ارتفاع المثلث الذى طول قاعدته ١,٢٣ مترا ؟

❺إذا كان ١٢ عاملا فى مصنع يجب أن يعملوا لمدة ٦ أمتار حتى يمكنهم إنتاج ١٥٠٠ وحدة معينة ، فكم يوما من العمل يحتاجها ٨ عمال لإنتاج ٢٥٠٠ وحدة من نفس الوحدات .

❻ إذا كانت :إذا كان ارتفاع اسطوانة دائرية قائمة (حجمها ثابت)يتغير عكسيا بتغير مربع طول نصف قطرها (نق) وكان ع = ٢٧ عندما نق ١٠,٥سم فأوجد ع عندما نق = ١٥,٧٥سم

❼ إذا كانت : تسير سيارة بسرعة ثابتة بحيث تتناسب المسافة المقطوعة طرديا مع الزمن فاذا قطعت السيارة مسافة ١٥٠كجم فى ٦ساعات ، فكم كيلومتر تقطعها السيارة فى ١٠ ساعات ؟

❽ إذا كان وزن جسم على القمر (و) يتناسب طرديا مع وزنه على الأرض (ر) ، وإذا كان الجسم يزن ٨٤كيلوجراما على الأرض ووزنه على القمر ١٤كجم ، فماذا يكون وزنه على القمر إذا كان وزنه على الأرض ١٤٤كجم ؟

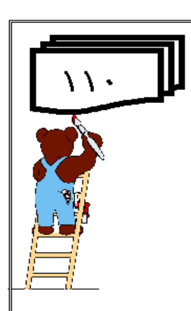
❾ إذا كان عدد الساعات (ن) اللازمة لانجاز عمل معين يتناسب عكسيا مع عدد العمال (س) الذين يقومون بهذا العمل ، فإذا أنجز العمل ٦عمال فى ٤ ساعات ، فما الزمن الذى يستغرقه ٨ عمال لانجاز نفس العمل ؟

❿ إذا كان ما تدفعه إدارة مجلة من النقود مقابل أى مقال (م) يتناسب طرديا مع عدد الكلمات فى المقال (ك) فإذا كانت إدارة المجلة تدفع ٧٢٠ جنيها لمقال من ١٢٠٠ كلمة فكم تدفع لمقال يتكون من ١٥٠٠ كلمة ؟

⓫ إذا كان مقدار السرعة (ع) التى يخرج بها الماء من فوهة خرطوم يتغير عكسيا بتغير مربع طول نصف قطر فوهة الخرطوم نق وكانت ع = ٥سم/ث عندما نق =٣سم أوجد ع عندما نق = ٢,٥سم .

⓬ إذا كان وزن جسم يتغير عكسيا مع مربع بعده عن مركز الأرض وأطلق قمر صناعى يزن ٥٠٠ ثقل كجم فكم يزن عندما يكون على ارتفاع ٦٤٠كم عن سطح الأرض مقربا الناتج لأقرب ثقل كجم (اعتبر طول نصف قطر الأرض ٦٣٩٠ كم)

⓭ إذا كان وزن جسم على القمر على القمر(و) يتناسب طرديا مع وزنه على الأرض (ر) فإذا كان الجسم يزن ١٦٨كجم على الأرض ويزن ٢٨ كجم على القمر فماذا يكون وزنه على القمر اذا كان الجسم يزن ٢٨٨ كجم على الأرض ؟



الاحصاء

الدرس الرابع

الانحراف المعيارى

مصادر جمع المعلومات (البيانات)

❶ مصادر أولية (ميدانية)

مصادر نحصل عليها من المقابلات الشخصية واستطلاعات الرأي والاستبيانات

❷ مصادر ثانوية (تاريخية)

مصادر نحصل عليها من الانترنت و وسائل الإعلام المرئية والمسموعة والمقروءة و الهيئات الرسمية

أسلوب جمع البيانات

❶ أسلوب الحصر الشامل　　❷ أسلوب العينات

كيفية إختيار العينة العشوائية

العينات العشوائية　　العينات الغير عشوائية

من مقاييس النزعة المركزية

الوسط الحسابى

الوسط الحسابى ونرمز له بالرمز $\overline{س}$ = $\frac{مج (س)}{ن}$ = $\frac{مجموع القيم}{عدد القيم}$

التشتت

التشتت لمجموعة من القيم

هو التقارب أو التباعد بين هذه القيم وهو يعبر عن مدى تجانس المفردات

فمثلا

المجموعة أ　٩٨ ، ٩٩ ، ١٠٠ ، ١٠١ ، ١٠٢ مجموعة متجانسة ومتقاربة أى تشتتها قليل

المجموعة ب　١٠ ، ٤٠ ، ٦٠ ، ٣٠ ، ١١٠ مجموعة غير متجانسة ومتباعدة أى تشتتها كبير

المجموعة جـ　٣ ، ٣ ، ٣ ، ٣ ، ٣ مجموعة متجانسة ومتقاربة أى تشتتها = ٠

١. التشت يكون صغيرا اذا كان الاختلاف(الفرق) بين القيم صغيرا
٢. التشت يكون كبيرا اذا كان الاختلاف (الفرق) بين القيم كبيرا
٣. التشت يساوى صفر اذا تساوىت جميع المفردات

مقاييس التشتت

المدى　　الانحراف المعيارى

المدى

هو الفرق بين أكبر قيمة وأصغر قيمة لمجموعة من المفردات

يمتاز بالبساطة و السهولة لذلك غالبا مايستعمل فى مقياس التشت فى الصناعة

يعاب عليه انه يعتمد على قيمتين فقط ويهمل باقى القيم كما ان هاتين القيمتين هما القيم الاكثر شذوذا أو تطرفا مما يجعل المدى مقياسا مضللا للتشت

فمثلا

المجموعة أ : ٩ ، ٩ ، ٩ ، ٩ ، ٩ ، ١٠٩

المجموعة أ : ٩ ، ٣٢ ، ٤٥ ، ٧٧ ، ١٠١ ، ١٠٩

المدى للمجموعة الاولى = ١٠٩ - ٩ = ١٠٠ ، المدى للمجموعة الثانية = ١٠٩ - ٩ = ١٠٠

من الملاحظ أن المجموعة الاولى شديدة التجانس ولولا وجود المفردة الاخيرة فى المجموعة الاولى لكان المدى = ٩ - ٩ = ٠

اما المجموعة الثانية فهى غير متجانسة وغير متقاربة

مثال ١

اوجد المدى لمجموعة القيم { ٣ ، ٨ ، ٤ ، ٥ ، ١١ ، ٧ }

المدى = ١١ - ٣ = ٨

مثال ٢

اوجد المدى لمجموعة القيم { ١٩ ، ١٨ ، ٩٤ ، ٨٥ ، ١٣ ، ٧٠ }

المدى = ٩٤ - ١٣ = ٨١

مثال ٣

اوجد المدى لمجموعة القيم { ١٢ ، ١٢ ، ٢٩ ، ٢٥ ، ١٢ ، ٢٥ }

المدى = ٢٩ - ١٢ = ١٧

مثال ٤

اوجد المدى لمجموعة القيم { ١٦ ، - ٤٤ ، ٦٨ ، - ٥٢ ، - ٧٧ ، صفر }

المدى = ٦٨ - (- ٧٧) = ٦٨ + ٧٧ = ١٤٥

مثال ٥

اوجد المدى لمجموعة القيم { - ٤٥ ، - ٣٤ ، - ١٥ ، - ١٢ ، - ٥٣ ، - ٣٨ }

المدى = - ١٢ - (- ٥٣) = - ١٢ + ٥٣ = ٤١

مثال ٦

اوجد المدى لمجموعة القيم { ٧٥ ، ٧٥ ، ٧٥ ، ٧٥ ، ٧٥ ، ٧٥ ، ٧٥ }

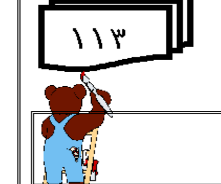
المدى = ٧٥ - ٧٥ = صفر

مثال ٧

اذا كان المدى لمجموعة من القيم = ١٨ وكانت أكبر قيمة فى القيم = ٤٩ احسب القيمة الصغرى للقيم

∵ المدى = القيمة الكبرى – القيمة الصغرى

١٨ = ٤٩ - القيمة الصغرى ∴ القيمة الصغرى = ٤٩ - ١٨ = ٣١



مثال ٨

اذا كان القيمة الصغر فى مجموعة من القيم = ٩ وكان المدى للقيم = ٢٤ احسب القيمة العظمى فى تلك القيم

∵ المدى = القيمة الكبرى – القيمة الصغرى

∵ ٢٤ = القيمة الكبرى – ٩

∴ القيمة الكبرى = ٢٤ + ٩ = ٣٣

مثال ٩

اذا كان القيمة الصغرى فى مجموعة من القيم = ٢٤ وكان القيمة الكبرى تساوى ثلاثة امثال قيمة المدى

احسب القيمة الكبرى للمدى

∵ المدى = القيمة الكبرى – القيمة الصغرى

∵ س = ٣س – ٢٤

∴ ٣س - س = ٢٤

∴ ٢س = ٢٤ ∴ س = ١٢

مثال ١٠

مجموعتان من الطلاب درجاتهم فى أحد الاختبارات

المجموعة الاولى : ٤٥ ، ٦٧ ، ٣٢ ، ٨٥ ، ٦٦ ، ٣٤ ، ٤١ ، ٨٢

المجموعة الثانية : ٥٠ ، ٧٧ ، ٤٢ ، ٧٦ ، ٦٩ ، ٤٠ ، ٣٨ ، ٨١ قارن بين المجموعتان من حيث المدى

مدى المجموعة الاولى = ٨٥ - ٣٢ = ٥٣

مدى المجموعة الثانية = ٨١ - ٣٨ = ٤٣

من الواضح ان تشتت المجموعة الاولى أكثر تشتتا من المجموعة الثانية

مثال ١١

مجموعتان من الطلاب درجاتهم فى أحد الاختبارات

المجموعة الاولى	٢٥	٨٧	٤٩	١٨	٧٤	٤٥	٥٠
المجموعة الثانية	٨٨	٥٩	٧١	٦٤	٢٦	٤٣	٩٦

قارن بين المجموعتان من حيث المدى

مدى المجموعة الاولى = ٨٧ - ١٨ = ٦٩

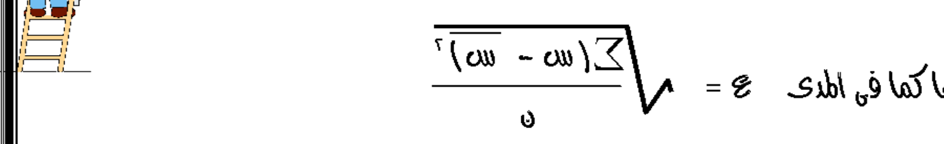
مدى المجموعة الثانية = ٩٦ - ٢٦ = ٦٠

من الواضح ان تشتت المجموعة الاولى أكثر تشتتا من المجموعة الثانية

الانحراف المعيارى



ويدخل فى حسابه جميع القيم وليس أكبرها أو أصغرها كما فى المدى ع =



$$ع = \sqrt{\frac{\sum (س - \overline{س})^{٢}}{ن}}$$

ع أو الرمز (σ) سيجما = الانحراف المعيارى ، $\sum$ ترمز الى مجـ (مجموع) أو صميشن (summation)

ن عدد القيم س القيم المعطاة $\overline{س}$ الوسط الحسابى للقيم (س بار) (س Bar)

ملاحظات هامه

(١) قيمة الانحراف المعيارى دائما موجبة أو أكبر من أو تساوى صفر أى أن σ ≥ صفر

(٢) لا يتأثر الانحراف المعيارى بانحراف جميع القيم حتى القيم المتطرفة و الشاذة .

(٣) يستخدم الانحراف المعيارى فى المقارنة بين تشتت المجموعات التى لها نفس وحدات القياس و له نفس وحدة قياس البيانات الأصلية

(٤) كلما كان التشتت كبيرا حول الوسط كلما كان الانحراف المعيارى كبيرا و العكس صحيح

أولا : حساب الانحراف المعياري لمجموعة القيم

نكون جدول من ٣ أعمدة

العمود الأول وفيه القيم المعطاة وهى س نوجد مجموع القيم ونرمز لها بالرمز مجـ س = $\sum$ س

ثم نوجد الوسط الحسابى ونرمز له بالرمز $\overline{س} = \frac{مجـ (س)}{ن} = \frac{\sum (س)}{ن} = \frac{مجموع القيم}{عدد القيم}$

العمود الثانى (انحرافات قيم س عن الوسط الحسابى (س - $\overline{س}$)

العمود الثالث نوجد مربعات الانحرافات (س - $\overline{س}$)^{٢}

ونوجد مجموع العمود الثالث أسفلة ونرمز له مجـ (س - $\overline{س}$)^{٢} = $\sum$ (س - $\overline{س}$)^{٢} ثم نعوض فى القانون ع = $\sqrt{\frac{\sum (س - \overline{س})^{٢}}{ن}}$

مثال ١

اوجد المدى الانحراف المعيارى للقيم : ٢ ، ٥ ، ٨ ، ٦ ، ٤

الحل

المدى = ٨ - ٢ = ٦

مج (س) = ٢٥ ، ن = ٥

الوسط الحسابى $\overline{س}$ = $\frac{\sum (س)}{ن}$ = $\frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عدد القيم}}$ = $\frac{٢٥}{٥}$ = ٥

الانحراف المعيارى ع (σ) = $\sqrt{\frac{\text{مج}(س - \overline{س})^٢}{ن}}$ =

= $\sqrt{\frac{\sum(س - \overline{س})^٢}{ن}}$ = $\sqrt{\frac{٢٠}{٥}}$

= $\sqrt{٤}$ = ٢

س	(س - $\overline{س}$)	(س - $\overline{س}$)^٢
٢	٢ - ٥ = - ٣	٩
٥	٥ - ٥ = ٠	٠
٨	٨ - ٥ = ٣	٩
٦	٦ - ٥ = ١	١
٤	٤ - ٥ = - ١	١
مج(س)=٢٥		مج(س - $\overline{س}$)^٢= ٢٠

مثال ٢

اوجد المدى الانحراف المعيارى للقيم : ١١ ، ١٤ ، ١٩ ، ١٥ ، ١١

الحل

المدى = ١٩ - ١١ = ٨

مج (س) = ٧٠ ، ن = ٥

الوسط الحسابى $\overline{س}$ = $\frac{\sum (س)}{ن}$ = $\frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عدد القيم}}$ = $\frac{٧٠}{٥}$ = ١٤

الانحراف المعيارى ع (σ) = $\sqrt{\frac{\text{مج}(س - \overline{س})^٢}{ن}}$ =

= $\sqrt{\frac{\sum(س - \overline{س})^٢}{ن}}$ = $\sqrt{\frac{٤٤}{٥}}$ = $\sqrt{٨,٨}$ = ٢,٩٦

س	(س - $\overline{س}$)	(س - $\overline{س}$)^٢
١١	١١ - ١٤ = - ٣	٩
١٤	١٤ - ١٤ = ٠	٠
١٩	١٩ - ١٤ = ٥	٢٥
١٥	١٥ - ١٤ = ١	١
١١	١١ - ١٤ = - ٣	٩
مج (س) =٧٠		مج(س - $\overline{س}$)^٢= ٤٤

مثال ٣

أوجد المدى الانحراف المعيارى للقيم : ١٢ ، ١٣ ، ١٦ ، ١٨ ، ٢١

الحل المدى للقيم = ٢١ − ١٢ = ٩

$\sum(س) = ٨٠$ ، $ن = ٥$

الوسط الحسابى $\overline{س} = \frac{مجـ(س)}{ن} = \frac{\sum(س)}{ن}$

$= \frac{مجموع\ القيم}{عدد\ القيم} = \frac{٨٠}{٥} = ١٦$

س	(س − $\overline{س}$)	(س − $\overline{س}$)^٢
١٢	١٢ − ١٦ = − ٤	١٦
١٣	١٣ − ١٦ = − ٣	٩
١٦	١٦ − ١٦ = ٠	٠
١٨	١٨ − ١٦ = ٢	٤
٢١	٢١ − ١٦ = ٥	٢٥
مجـ(س) = ٨٠		مجـ(س − $\overline{س}$)^٢ = ٥٤

الانحراف المعيارى ع (σ) = $\sqrt{\frac{مجـ(س - \overline{س})^٢}{ن}}$ =

$\sqrt{\frac{\sum(س - \overline{س})^٢}{ن}} = \sqrt{\frac{٥٤}{٥}} = \sqrt{١٠,٨} = ٣,٢٨٦$

ثانيا : حساب الانحراف المعيارى للتوزيع التكرارى

نكون جدول مكون من ٧ أعمده

العمود الأول نكتب فيه المجموعات

العمود الثانى نكتب فيه التكرار (ك)

العمود الثالث نكتب فيه مركز المجموعة (م)

العمود الرابع (ك × س) ثم نحسب الوسط الحسابى $\overline{س} = \frac{\sum(س \times ك)}{\sum ك} = \frac{مجـ(س \times ك)}{مجـ ك}$

العمود الخامس (س − $\overline{س}$)

العمود السادس (س − $\overline{س}$)^٢ العمود السابع (س − $\overline{س}$)^٢ × ك

ثم نحسب الانحراف المعيارى من القانون الانحراف المعيارى ع (σ) = $\sqrt{\frac{\sum(س - \overline{س})^٢ ك}{\sum ك}}$

مثال٤

فيما يلى التوزيع التكرارى لعدد الوحدات التالفة الى وجدت فى ١٠٠ صندوق فى الوحدات المصنعة

عددا لوحدات التالفة	٠	١	٢	٣	٤	٥
عدد الصناديق	٣	١٦	١٧	٢٥	٢٠	١٩

اوجد الوسط الحسابى و الانحراف المعيارى للوحدات التالفة

الحل

عددالوحدات(س)	عددالصناديق(ك)	س × ك	(س − $\overline{س}$)	$(س − \overline{س})^٢$	$(س − \overline{س})^٢$ × ك
٠	٣	٠	− ٣	٩	٢٧
١	١٦	١٦	− ٢	٤	٦٤
٢	١٧	٣٤	− ١	١	١٧
٣	٢٥	٧٥	٠	٠	٠
٤	٢٠	٨٠	١	١	٢٠
٥	١٩	٩٥	٢	٤	٧٦
	مجـ (ك)=١٠٠	مجـ (س × ك) = ٣٠٠			مجـ$(س−\overline{س})^٢$×ك= ٢٠٤

$$\text{الوسط الحسابى } \overline{س} = \frac{\text{مجـ (س × ك)}}{\text{مجـ ك}} = \frac{\sum (س × ك)}{\sum ك} = \frac{٣٠٠}{١٠٠} = ٣$$

$$\text{الانحراف المعيارى ع } (\sigma) = \sqrt{\frac{\sum (س - \overline{س})^٢ ك}{\sum ك}} = \sqrt{\frac{٢٠٤}{١٠٠}} = \sqrt{٢,٠٤} = ١,٤٢٨$$

مثال ٥

فيما يلى التوزيع التكرارى لعدد الأطفال فى لبعض الأسر فى احد المدن الجديدة

عد الأطفال	٠	١	٢	٣	٤
عدد الأسر	٨	١٦	٥٠	٢٠	٦

اوجد الوسط الحسابى و الانحراف المعيارى لعدد الأطفال للتوزيع التكرارى

الحل

عددالأطفال(س)	عددالأسر(ك)	س × ك	(س − $\overline{س}$)	$(س − \overline{س})^٢$	$(س − \overline{س})^٢$ × ك
٠	٨	٠	− ٢	٤	٣٢
١	١٦	١٦	− ١	١	١٦
٢	٥٠	١٠٠	٠	٠	٠
٣	٢٠	٦٠	١	١	٢٠
٤	٦	٢٤	٢	٤	٢٤
	مجـ(ك)=١٠٠	مجـ(س × ك)=٢٠٠			مجـ$(س−\overline{س})^٢$×ك= ٩٢

$$\text{الوسط الحسابى } \overline{س} = \frac{\text{مجـ (س × ك)}}{\text{مجـ ك}} = \frac{\sum (س × ك)}{\sum ك} = \frac{٢٠٠}{١٠٠} = ٢$$

$$\text{الانحراف المعيارى ع } (\sigma) = \sqrt{\frac{\sum (س - \overline{س})^٢ ك}{\sum ك}} = \sqrt{\frac{٩٢}{١٠٠}} = \sqrt{٠.٩٢} = ٠.٩$$

مثال ٦

فيما يلى التوزيع التكرارى لعدد الأهداف المسجلة فى عدد من مباريات كرة القدم

عددا لأهداف	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧
عدد المباريات	٤	٦	٥	١٠	٨	٢	٣	٢

اوجد الوسط الحسابى و الانحراف المعيارى لعدد الأهداف للتوزيع التكرارى

الحل

عددالأهداف(س)	عددالمباريات(ك)	س × ك	(س − $\overline{س}$)	(س − $\overline{س}$)^2	(س − $\overline{س}$)^2 × ك
٠	٤	٠	− ٣	٩	٣٦
١	٦	٦	− ٢	٤	٢٤
٢	٥	١٠	− ١	١	٥
٣	١٠	٣٠	٠	٠	٠
٤	٨	٣٢	١	١	٨
٥	٢	١٠	٢	٤	٨
٦	٣	١٨	٣	٩	٢٧
٧	٢	١٤	٤	١٦	٣٢
	مجـ (ك)= ٤٠	مجـ (س × ك) = ١٢٠			مجـ(س − $\overline{س}$)^2×ك = ١٤٠

الوسط الحسابى $\overline{س}$ = $\frac{\text{مجـ (س × ك)}}{\text{مجـ ك}} = \frac{\sum(\text{س × ك})}{\sum \text{ك}} = \frac{١٢٠}{٤٠} = ٣$

الانحراف المعيارى ع (σ)= $\sqrt{\frac{\text{مجـ(س − }\overline{\text{س}}\text{)}^2\text{ك}}{\text{ك}}} = \sqrt{\frac{\sum(\text{س − }\overline{\text{س}})^2\text{ك}}{\sum \text{ك}}} = \sqrt{\frac{٠٤١}{٤٠}} = \sqrt{٣,٥} = ١,٨$

مثال ٧

المجموعة	٥−	١٥−	٢٥−	٣٥−	٤٥−
التكرار	٣	٤	٧	٤	٢

اوجد الوسط الحسابى و الانحراف المعيارى للتوزيع التكرارى

الحل

المجموعة	التكرار (ك)	مركز المجموعة س	س × ك	(س − $\overline{س}$)	(س − $\overline{س}$)^2	(س − $\overline{س}$)^2 × ك
٥−	٣	١٠	٣٠	− ١٩	٣٦١	١٠٨٣
١٥−	٤	٢٠	٨٠	− ٩	٨١	٣٢٤
٢٥−	٧	٣٠	٢١٠	١	١	٧
٣٥−	٤	٤٠	١٦٠	١١	١٢١	٤٨٤
٤٥−	٢	٥٠	١٠٠	٢١	٤٤١	٨٨٢
	مجـ (ك)= ٢٠		مجـ(س×ك)= ٥٨٠			مجـ(س − $\overline{س}$)^2×ك = ٢٧٨٠

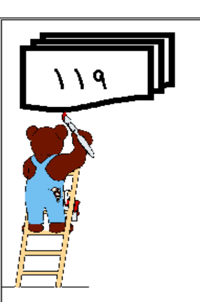
الوسط الحسابى $\overline{س}$ = $\frac{\text{مجـ (س × ك)}}{\text{مجـ ك}} = \frac{\sum(\text{س × ك})}{\sum \text{ك}} = \frac{٨٥٠}{٠٢} = ٢٩$

الانحراف المعيارى ع (σ)= $\sqrt{\frac{\text{مجـ(س − }\overline{\text{س}}\text{)}^2\text{ك}}{\text{مجـ ك}}} = \sqrt{\frac{\sum(\text{س − }\overline{\text{س}})^2\text{ك}}{\sum \text{ك}}} = \sqrt{\frac{٢٧٨٠}{٢٠}} = \sqrt{١٣٩} = ١١,٧٩$

مع أرق تمنياتي بالنجاح والتفوق ... أ/ وليد رشدي







مثال ٨

المجموعة	٢٥-	٣٥-	٤٥-	٥٥-	المجموع
التكرار	٢	٦	٨	٤	٢٠

اوجد الوسط الحسابى و الانحراف المعيارى للتوزيع التكرارى

الحل

المجموعة	التكرار (ك)	مركز المجموعة س	س × ك	$(س - \bar{س})$	$(س - \bar{س})^2$	$(س - \bar{س})^2 \times ك$
٢٥-	٢	٣٠	٦٠	١٧-	٢٨٩	٥٧٨
٣٥-	٦	٤٠	٢٤٠	٧-	٤٩	٢٩٤
٤٥-	٨	٥٠	٤٠٠	٣	٩	٧٢
٥٥-	٤	٦٠	٢٤٠	١٣	١٦٩	٦٧٦
	مجـ (ك) = ٢٠		مجـ (س × ك) = ٩٤٠			مجـ $(س - \bar{س})^2 \times ك$ = ١٦٢٠

الوسط الحسابى $\bar{س} = \frac{مجـ (س \times ك)}{مجـ ك} = \frac{\sum (س \times ك)}{\sum ك} = \frac{٩٤٠}{٢٠} = ٤٧$

الانحراف المعيارى ع (σ) = $\sqrt{\frac{مجـ (س - \bar{س})^2 ك}{مجـ ك}} = \sqrt{\frac{\sum (س - \bar{س})^2 ك}{\sum ك}} = \sqrt{\frac{١٦٢٠}{٢٠}} = \sqrt{٨١} = ٩$

مثال ٩

المجموعة	٠-	١٠-	٢٠-	٣٠-	٤٠- ٥٠
التكرار	٢	٣	١٨	٧	١٠

اوجد الوسط الحسابى و الانحراف المعيارى للتوزيع التكرارى

الحل

المجموعة	التكرار (ك)	مركز المجموعة س	س × ك	$(س - \bar{س})$	$(س - \bar{س})^2$	$(س - \bar{س})^2 \times ك$
٠-	٢	٥	١٠	٢٥-	٦٢٥	١٢٥٠
١٠-	٣	١٥	٤٥	١٥-	٢٢٥	٦٧٥
٢٠-	١٨	٢٥	٤٥٠	٥-	٢٥	٤٥٠
٣٠-	٧	٣٥	٢٤٥	٥	٢٥	١٧٥
٤٠-	١٠	٤٥	٤٥٠	١٥	٢٢٥	٢٢٥٠
	مجـ (ك) = ٤٠		مجـ (س × ك) = ١٢٠٠			مجـ $(س - \bar{س})^2 \times ك$ = ٤٠٠٠

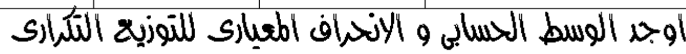
الوسط الحسابى $\bar{س} = \frac{مجـ (س \times ك)}{مجـ ك} = \frac{\sum (س \times ك)}{\sum ك} = \frac{١٢٠٠}{٤٠} = ٣٠$

الانحراف المعيارى ع (σ) = $\sqrt{\frac{مجـ (س - \bar{س})^2 ك}{مجـ ك}} = \sqrt{\frac{\sum (س - \bar{س})^2 ك}{\sum ك}} = \sqrt{\frac{٤٠٠٠}{٤٠}} = \sqrt{١٠٠} = ١٠$



مثال ١٠

المجموعة	٢٠-	٢٢-	٢٤-	٢٦- ٢٨	المجموع
التكرار	٥	٧	٦	٢	٢٠



الحل

المجموعة	التكرار (ك)	مركز المجموعة س	س × ك	(س − $\overline{س}$)	(س − $\overline{س}$)^2	(س − $\overline{س}$)^2 × ك
٢٠-	٥	٢١	١٠٥	-٢,٥	٦,٢٥	٣١,٢٥
٢٢-	٧	٢٣	١٦١	-٠,٥	٠,٢٥	١,٧٥
٢٤-	٦	٢٥	١٥٠	١,٥	٢,٢٥	١٣,٥٠
٢٦-	٢	٢٧	٥٤	٣,٥	١٢,٢٥	٢٤,٥٠
	مج (ك) = ٢٠		مج(س × ك) = ٤٧٠			مج(س − $\overline{س}$)^2 × ك = ٧١

$$\text{الوسط الحسابى } \overline{س} = \frac{\text{مج}(س \times ك)}{\text{مج} ك} = \frac{\Sigma(س \times ك)}{\Sigma ك} = \frac{٤٧٠}{٢٠} = ٢٣,٥$$

$$\text{الانحراف المعيارى ع } (\sigma) = \sqrt{\frac{\Sigma(س - \overline{س})^2 ك}{\Sigma ك}} = \sqrt{\frac{\text{مج}(س - \overline{س})^2 ك}{\text{مج} ك}} = \sqrt{\frac{٧١}{٢٠}} = \sqrt{٣,٥} = ١,٨$$

مثال ١١

المجموعة	٠-	٢-	٤-	٦-	٨-
التكرار	١	٤	٧	٥	٣

اوجد الوسط الحسابى و الانحراف المعيارى للتوزيع التكرارى

الحل

المجموعة	التكرار (ك)	مركز المجموعة س	س × ك	(س − $\overline{س}$)	(س − $\overline{س}$)^2	(س − $\overline{س}$)^2 × ك
٠	١	١	١	-٤,٥	٢٠,٢٥	٢٠,٢٥
٢	٤	٣	١٢	-١,٥	٢,٢٥	٩
٤	٧	٥	٣٥	-٠,٥	٠,٢٥	١,٧٥
٦	٥	٧	٣٥	١,٥	٢,٢٥	١١,٢٥
٨	٣	٩	٢٧	٣,٥	١٢,٢٥	٣٦,٧٥
	مج (ك) = ٢٠		مج(س × ك) = ١١٠			مج(س − $\overline{س}$)^2 × ك = ٧٩

$$\text{الوسط الحسابى } \overline{س} = \frac{\text{مج}(س \times ك)}{\text{مج} ك} = \frac{\Sigma(س \times ك)}{\Sigma ك} = \frac{١١٠}{٢٠} = ٥,٥$$

$$\text{الانحراف المعيارى ع } (\sigma) = \sqrt{\frac{\Sigma(س - \overline{س})^2 ك}{\Sigma ك}} = \sqrt{\frac{٧٩}{٢٠}} = \sqrt{٤,٨٥} = ٢,٢$$





تمارين على الإنحراف المعيارى

[١] اكمل ما يأتى :

❶ الانحراف المعيارى هو ....

❷ الجذر التربيعى لمتوسط مربعات انحرافات القيم عن وسطها الحسابي ....

❸ إذا كان الانحراف المعيارى لمجموعة من المفردات = ٠ فان ....

❹ إذا كان الانحراف المعيارى لتسعة قيم هو ٣ فان $\sum(س - \overline{س})^٢$ لهذه القيم هو ....

❺ الفرق بين أكبر قيمة وأقل قيمة لمجموعة من المفردات يسمى ....

❻ إذا كان مجموعة من القيم متجانسة تماما فان الانحراف المعيارى لها قيمته = ...

❼ المدى للقيم ٦ ، ٨ ، ٩ ، ١ هو ....

❽ الوسط الحسابى للقيم ٧ ، ٩ ، ١١ ، ١٥ هو ....

❾ الوسط الحسابى للقيم = $\frac{.............}{.............}$

❿ التشتت هو مقياس يعبر عن ....

⓫ الوسط الحسابى للقيم (٣ أ – ٣) ، (٣ أ – ١) ، (٢ أ – ١) ، (٢ أ + ٣) ، (٢ أ + ٥) هو ١٣ فان أ = ...

⓬ ابسط مقاييس التشتت هو ....

⓭ المدى هو الفرق بين ...... و لا يعطى صورة صادقة ......

⓮ لأي مجموعة من القيم إذا تساوى جميع المفردات فان التشتت = ...

⓯ إذا كان المدى لمجموعة قيم موجبه ١٢ ، ٨ ، س ، ١٥ ، ٥ هو ١٧ فان قيمة س الموجبة = ...

⓰ الدرجة الأكثر تكرارا لمجموعة من البيانات تسمى ....

[٢] أوجد المدى والانحراف المعيارى لمجموعة القيم

❶ ٣ ، ٦ ، ٩ ، ٥ ، ١ ، ٧

❷ ٢ ، ٧ ، ٩ ، ٥ ، ٠ ، ٥

❸ ٦ ، ٩ ، ٣٣ ، ٧٢ ، ٦٤

❹ ٦٥ ، ٦١ ، ٧٠ ، ٦٤ ، ٧٠ ، ٧٦ ، ٧٠

❺ ٣٩ ، ٨٥ ، ٤٦ ، ٩١ ، ٨٨ ، ٥٠ ، ٧٧

❻ ٢٣ ، ١٢ ، ١٧ ، ١٣ ، ١٥ ، ١٦ ، ٨ ، ٩ ، ٣٧ ، ١٠

❼ – ١٢ ، – ٣٤ ، – ٩١ ، – ٥٥ ، ٩٨ ، ٦٥

مع أرق تمنياتي بالنجاح والتفوق ... أ/ وليد رشدي

[٣] أى المجموعات التالية اكثر تشتتا ؟ [باستخدام الإنحراف المعيارى]

المجموعة (أ) : ٧ ٨ ٩ ١٠ ١١

المجموعة (ب) : ٢١ ٢٠ ١١ ١٩

المجموعة (جـ) : ٢٩ ٣٠ ٣٠ ٣٥

أوجد الوسط الحسابى والانحراف المعيارى لقيم الفواتير .

[٤] الجدول المقابل يبين

درجات الحرارة على بعض المدن :

المدينة	عظمى	صغرى
الإسماعيلية	٢٥	٨
السويس	٢٨	٩
العريش	٢٣	١١
المنصورة	٢٤	١٠
الزقازيق	٢٣	١٠
الإسكندرية	٢٢	٩
الغردقة	٢٧	١٣
القاهرة	٢٦	١٢

(١) احسب الوسط الحسابى و الانحراف المعيارى لدرجة الحرارة العظمى

(٢) احسب الوسط الحسابى و الانحراف المعيارى لدرجة الحرارة الصغرى

(٣) إذا كان الانحراف المعيارى لمجموعة من المفردات = صفر ، فماذا تستنتج ؟

[٥] الجدول الآتي يبين توزيع درجات ٣٠ طالبا بأحد الاختبارات :

المجموعة	٦	٩	١٢	١٥	١٧	المجموع
عدد الطلاب	٤	٧	٨	٥	٦	٣٠

أوجد الوسط الحسابى والانحراف المعيارى لهذه الدرجات .

[٦] التوزيع التكرارى التالى يبين عدد أطفال بعض الأسر فى إحدى المدن الجديدة :

عدد الأطفال	صفر	١	٢	٣	٤
عدد الأسر	٨	١٦	٥٠	٢٠	٦

أوجد الوسط الحسابى والانحراف المعيارى لعدد الأطفال .

[٧] التوزيع التكرارى التالى يبين عدد الأهداف التى سجلها ٣٠ لاعب من ٥ ضربات جزاء فى أحد التدريبات :

المجموعة	صفر	١	٢	٣	٤	٥
التكرار	٢	٤	٥	٨	٧	٤

أوجد الوسط الحسابى والانحراف المعيارى لعدد الأهداف المسجلة .

[١٤] التوزيع التكرارى التالى يبين قيمة فاتورة الكهرباء ل ٢٠٠ مشترك :

قيمة الفاتورة	-٥	-١٥	-٢٥	-٣٥	-٤٥	-٥٥
عدد المشتركين	١٩	٥٠	٨٥	٢٥	١٥	٦

احسب الوسط الحسابى و الانحراف المعيارى للعدد المشتركين .

[١٥] الجدول التالى يبين توزيع الاستهلاك الشهرى لخمسين أسرة من الكهرباء .

المستهلك	-١٢٠	-١٣٠	-١٤٠	-١٥٠	-١٦٠	-١٧٠	-١٨٠
عدد الأسر	٢	٥	٨	١٤	١٢	٦	٣

احسب الوسط الحسابى و الانحراف المعيارى للاستهلاك

[١٦] احسب الوسط الحسابى و الانحراف المعيارى للتوزيع التكرارى التالى .

المجموعات	-١	-٢	-٣	-٤	-٥	-٦	-٧
التكرار	٤	٥	٦	٩	١٦	٨	٢

[١٧] الجدول التالى يبين توزيع درجات ٥٠ طالبا فى امتحان ما .

الدرجات	-٠	-١٠	-٢٠	-٣٠	-٤٠
عدد التلاميذ	٥	١٢	١٨	٩	٦

احسب الوسط الحسابى و الانحراف المعيارى للدرجات .

[١٨] احسب الوسط الحسابى و الانحراف المعيارى للتوزيع التكرارى التالى .

المجموعات	-٠	-٢	-٤	-٦	-٨	-١٠	-١٢
التكرار	٧	١٠	١٨	٢٥	١٣	٥	٢

[١٩] الجدول التالى يبين توزيع أعمار العمال فى أحد المصانع .

المجموعات	-٨	-١٢	-١٦	-٢٠	-٢٤	-٢٨
التكرار	٥	٧	٤	٥	٣	٦

احسب الوسط الحسابى و الانحراف المعيارى للأعمار .

[٨] التوزيع التكرارى التالى يبين أعمار ١٠ أطفال :

العمر بالسنوات	٥	٨	٩	١٠	١٢	المجموع
عدد الأطفال	١	٢	٣	٣	١	١٠

أوجد الوسط الحسابى والانحراف المعيارى للعمر بالسنوات .

[٩] التوزيع التكرارى التالى يبين عدد الطلاب الفائزين فى المسابقة الفنية فى مدرسة بها ٢٠ فصلا :

عدد الطلاب	صفر	١	٢	٣	٤	٥
التكرار	١	٣	٥	٦	٣	٢

أوجد الوسط الحسابى والانحراف المعيارى لعدد التلاميذ .

[١٠] التوزيع التكرارى التالى يبين درجات الحرارة فى بعض المدن العالمية

المجموعات	-٥	-١٥	-٢٥	-٣٥	-٤٥
التكرار	٧	٩	١١	١٥	٨

أوجد الوسط الحسابى والانحراف المعيارى لدرجات الحرارة .

[١١] فى التوزيع التكرارى التالى أوجد الوسط الحسابى والانحراف المعيارى.

المجموعة	صفر-	٤-	٨-	١٢-	١٦- ٢٠	المجموع
التكرار	٣	٤	٧	٢	٩	٢٥

[١٢] الجدول التكراري التالى يمثل الأجر اليومى لمجموعة العمال بأحد المصانع .

مجموعات الدخل	٢٠-	٣٠-	٤٠-	٥٠-	٦٠-	٧٠-
عدد العمال	١٠	١٢	٨	٦	٣	١

أوجد الوسط الحسابى والانحراف المعيارى للدخل .

[١٣] التوزيع التكراري التالي يبين كمية البنزين التى تستهلكها مجموعة من السيارات :

عدد الكيلومترات لكل لتر	٥-	٧-	٩-	١١-	١٣-	١٥- ١٧
عدد السيارات	٣	٦	١٠	١٢	٥	٤

أوجد الوسط الحسابى والانحراف المعيارى لعدد الكيلومترات لكل لتر .



[٢٠] الجدول التالى يبين توزيع أجور ١٠٠ عامل فى أحد المصانع .

المجموعات	٤٠-	٤٥-	٥٠-	٥٥-	٦٠-	٦٥-	٧٠-	٧٥
التكرار	٤	١٠	١٤	١٥	٢٠	١٧	١٢	٨

احسب الوسط الحسابى و الانحراف المعيارى للأجور .

[٢١] الجدول التالى يبين توزيع التكرارى لدرجات فصلى ٣ / ١ ، ٣ / ٢ فى امتحان الرياضيات .

مجموع الدرجات	٠-	٥-	١٠-	١٥-	٢٠-	٢٥-	٣٠-	٣٥-
عدد طلاب ٣/١	١	٤	٧	١٤	٩	٨	٥	٢
عدد طلاب ٣/٢	٣	٦	١١	١٣	١٠	٥	٢	١

احسب الوسط الحسابى و الانحراف المعيارى لدرجات كل فصل ثم بين أى الدرجات أكثر تشتتا .

للمتفوقين

[٢٢] الجدولان التكراريان التاليان يمثلان توزيع درجات تلاميذ الفصلين م ، ب فى الصف الثالث الاعدادى فى أحد الاختبارات :

مجموع الدرجات	٠-	١٠-	٢٠-	٣٠-	٤٠- ٥٠-
عدد التلاميذ	٢	٥	١١	١٥	٧

فصل م

مجموع الدرجات	٠-	١٠-	٢٠-	٣٠-	٤٠- ٥٠-
عدد التلاميذ	٢	٣	١٨	٧	١٠

فصل ب

(١) مثل كلا من التوزيعين بالمضلع التكرارى على شكل واحد .

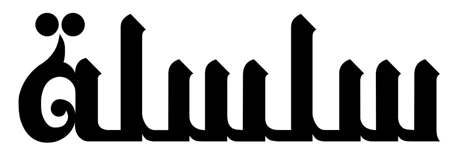
(٢) أوجد الوسط الحسابى و الانحراف المعيارى لكل التوزيعين التكراريين .

(٣) أى الفصلين أكثر تجانسا فى مستوى التحصيل ؟

[٢٣] الجدول التالى يبين درجات يوسف فى المواد الدراسية المختلفة فى أحد التقويمات علما بأن الدرجة النهائية ٥٠ درجة

أوجد الوسط الحسابى والانحراف المعيارى لهذه الدرجات .

المادة الدراسية	لغة عربي	رياضيات	علوم	دراسات اجتماعية	لغة أجنبية	حاسب آلي
الدرجة	٤٢	٤٨	٤٥	٤١	٤٦	٤٩



الأوائل

فى

الهندسة

للصف الثالث الإعدادى

إعداد م / وليد رشدى

هدية مجانية

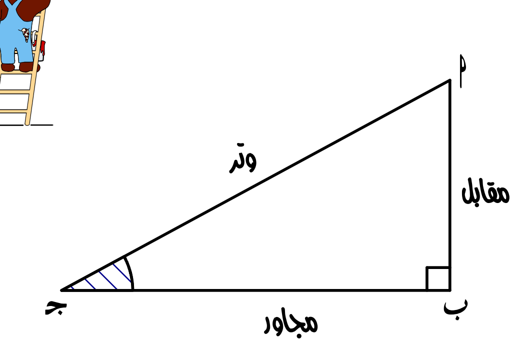


حساب المثلثات

١ النسب المثلثية الأساسية للزاوية الحادة

٢ النسب المثلثية لبعض الزوايا الخاصة

١ النسب المثلثية الأساسية للزاوية الحادة



❶ **جيب الزاوية** ج = جا ج = $\frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}}$ = $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ ج}}$

❷ **جيب تمام الزاوية** ج = جتا ج = $\frac{\text{مجاور}}{\text{الوتر}}$ = $\frac{\text{ب ج}}{\text{أ ج}}$

❸ **ظل الزاوية** ج = ظا ج = $\frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}}$ = $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب ج}}$

مثال [١]

إذا كانت النسبة بين زاويتين متتامتين كنسبة ٦ : ٧ اوجد القياس الستينى لكل منهما

بفرض أن الزاويتان هما ٦س ، ٧س

∵ الزاويتان متتامتان ∴ ٦س + ٧س = ٩٠ ∴ ١٣س = ٩٠

∴ س = $\frac{٩٠}{١٣}$

∴ قياس الزاوية الأولى = ٦س = ٦ × $\frac{٩٠}{١٣}$ = ١٨″ ٣٢′ ٤١°

∴ قياس الزاوية الثانية = ٧س = ٧ × $\frac{٩٠}{١٣}$ = ٤٢″ ٢٧′ ٤٨°

مثال [٢]

إذا كانت النسبة بين زاويتين متكاملتين كنسبة ٣ : ٤ اوجد القياس الستينى لكل منهما

بفرض أن الزاويتان هما ٣س ، ٤س

∵ الزاويتان متكاملتان ∴ ٣س + ٤س = ١٨٠

٧س = ١٨٠ س = $\frac{١٨٠}{٧}$

∴ قياس الزاوية الأولى = ٣ س = ٣ × $\frac{١٨٠}{٧}$ = ٣٤″ ٨′ ٧٧°

∴ قياس الزاوية الثانية = ٤س = ٤ × $\frac{١٨٠}{٧}$ = ٢٦″ ٥١′ ١٠٢°

مثال [٣]

إذا كانت النسبة بين قياسات زوايا مثلث كنسبة ٢ : ٤ : ٥ اوجد القياس الستينى لكل منهم

بفرض أن الزوايا هى ٢س ، ٤س ، ٥س ∵ مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠

∴ ٢س + ٤س + ٥س = ١٨٠ ∴ ١١س = ١٨٠ ∴ س = $\frac{١٨٠}{١١}$

قياس الزاوية الأولى = ٢ س = ٢ × $\frac{١٨٠}{١١}$ = ٣٢° ٤٣′ ٣٨″

قياس الزاوية الثانية = ٤ س = ٤ × $\frac{١٨٠}{١١}$ = ٦٥° ٢٧′ ١٦″

قياس الزاوية الثالثة = ٥ س = ٥ × $\frac{١٨٠}{١١}$ = ٨١° ٤٩′ ٦″

مثال [٤]

أ ب جـ △ قائم الزاوية فى ب ، أ ب = ٤ سم ، ب جـ = ٣ سم

❶ أوجد جميع الدوال المثلثية للزاوية جـ ، أ ❷ أثبت أن : جا أ جتا جـ + جتا أ جا جـ = ١

∵ من فيثاغورث أ جـ = ٥ سم

جا جـ = $\frac{مقابل}{وتر}$ = $\frac{أب}{أجـ}$ = $\frac{٤}{٥}$

جتا جـ = $\frac{مجاور}{الوتر}$ = $\frac{ب جـ}{أجـ}$ = $\frac{٣}{٥}$

ظا جـ = $\frac{مقابل}{مجاور}$ = $\frac{أب}{ب جـ}$ = $\frac{٤}{٣}$

جا أ = $\frac{مقابل}{وتر}$ = $\frac{ب جـ}{أجـ}$ = $\frac{٣}{٥}$

جتا أ = $\frac{مجاور}{الوتر}$ = $\frac{أب}{أجـ}$ = $\frac{٤}{٥}$

ظا أ = $\frac{مقابل}{مجاور}$ = $\frac{ب جـ}{أ ب}$ = $\frac{٣}{٤}$

أ ، ب ، جـ ، وتر ، ٥ سم ، مقابل ، ٤ سم ، مجاور ، ٣ سم

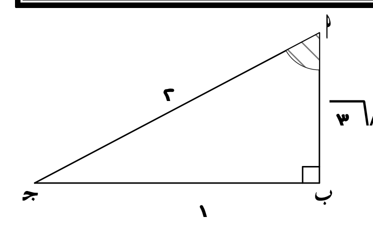
أ ، ب ، جـ ، وتر ، ٥ سم ، مجاور ، ٤ سم ، مقابل ، ٣ سم

جا أ جتا جـ + جتا أ جا جـ = $(\frac{٣}{٥})(\frac{٣}{٥}) + (\frac{٤}{٥})(\frac{٤}{٥})$ = $\frac{٩}{٢٥} + \frac{١٦}{٢٥} = \frac{٢٥}{٢٥}$ = ١

مثال [٥]

△ أ ب جـ فيه قائم الزاوية فى (∠ ب) ، ٢ أ ب = $\sqrt{3}$ أ جـ

اوجد جميع الدوال المثلثية للزاويتين أ ، جـ احسب قيمة $\frac{\text{ظا أ}}{\text{ظا جـ}}$



∵ ٢ أ ب = $\sqrt{3}$ أ جـ　　∴ $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

من فيثاغورث ب جـ = ١

∴ جا أ = $\frac{\text{مقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{1}{2}$　　∴ جتا أ = $\frac{\text{مجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$　　∴ ظا أ = $\frac{1}{\sqrt{3}}$

∴ جا جـ = $\frac{\text{مقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$　　∴ جتا جـ = $\frac{\text{مجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{1}{2}$　　∴ ظا جـ = $\sqrt{3}$

$\frac{\text{ظا أ}}{\text{ظا جـ}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \div \sqrt{3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}$

مثال [٦]

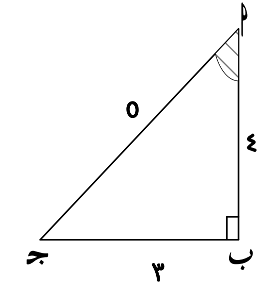
△ أ ب جـ فيه ق(∠ ب) = ٩٠° ، ٥ جا جـ − ١ = ٣ أوجد جميع الدوال المثلثية للزاويتين أ ، جـ

احسب قيمة جا أ جتا جـ + جتا أ جا جـ

من فيثاغورث ب جـ = ٣　　∵ ٥ جا جـ − ١ = ٣

∴ ٥ جا جـ = ٣ + ١

∴ ٥ جا جـ = ٤　　∴ جا جـ = $\frac{4}{5}$　　∴ جتا جـ = $\frac{\text{مجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{3}{5}$



∴ ظا جـ = $\frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{4}{3}$

∴ جا أ = $\frac{3}{5}$　　∴ جتا أ = $\frac{4}{5}$　　∴ ظا أ = $\frac{3}{4}$

∴ جا أ جتا جـ + جتا أ جا جـ = $(\frac{3}{5})(\frac{3}{5}) + (\frac{4}{5})(\frac{4}{5}) = \frac{9}{25} + \frac{16}{25} = \frac{25}{25} = 1$

مثال (٧)

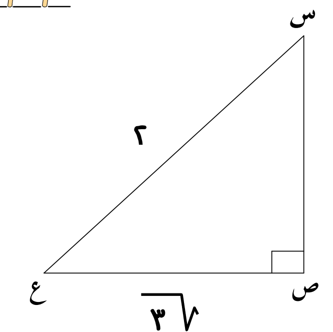
△ س ص ع **فيه** ق(∠ص) = ٩٠° ، ٢جتا س − ١ = صفر **احسب قيمة** جا² س + جتا² س

٢جتا س − ١ = صفر ٢جتا س = ١



جتا س = $\frac{١}{٢}$ = $\frac{\text{مجاور}}{\text{الوتر}}$ ∴ جا س = $\frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

∴ جا² س + جتا² س = $\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)^{٢}$ + $\left(\frac{١}{٢}\right)^{٢}$ = $\frac{٣}{٤}$ + $\frac{١}{٤}$ = $\frac{٤}{٤}$ = ١



مثال (٨)

△ أ ب جـ **فية** ق(∠ب) = ٩٠° ٥ ظا أ + ١ = ١٣ **اوجد جميع الدوال المثلثية للزاويتين** أ ، جـ

احسب قيمة جتا أ جتا جـ + جا أ جا جـ

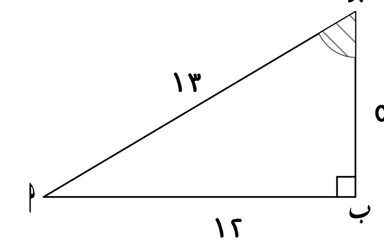
من فيثاغورث أ جـ = ١٣

٥ ظا جـ + ١ = ١٣ ∴ ٥ ظا جـ = ١٣ − ١ ∴ ٥ظا جـ = ١٢

∴ ظا جـ = $\frac{١٢}{٥}$ ∴ جتا جـ = $\frac{\text{مجاور}}{\text{الوتر}}$ = $\frac{٥}{١٣}$ ∴ جا جـ = $\frac{\text{مقابل}}{\text{الوتر}}$ = $\frac{١٢}{١٣}$

∴ جا أ = $\frac{\text{مقابل}}{\text{الوتر}}$ = $\frac{٥}{١٣}$ ∴ جتا أ = $\frac{\text{مجاور}}{\text{الوتر}}$ = $\frac{١٢}{١٣}$ ∴ ظا أ = $\frac{٥}{١٢}$

∴ جا أ جتا جـ + جتا أ جا جـ = $\left(\frac{٥}{١٣}\right)\left(\frac{٥}{١٣}\right)$ + $\left(\frac{١٢}{١٣}\right)\left(\frac{١٢}{١٣}\right)$ = $\frac{٢٥}{١٦٩}$ + $\frac{١٤٤}{١٦٩}$ = $\frac{١٦٩}{١٦٩}$ = ١



مثال (٩)

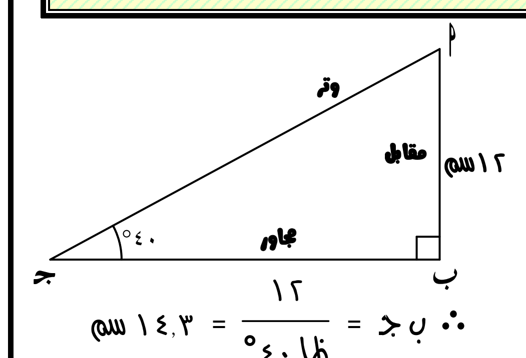
△ أ ب جـ **قائم فى** ب ، ق(∠جـ) = ٤٠° ، أ ب = ١٢ سم **احسب طول كلا من** $\overline{\text{أ جـ}}$ ، $\overline{\text{ب جـ}}$

احسب مساحة △ أ ب جـ

∵ جا جـ = $\frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}}$ = $\frac{\text{أب}}{\text{أجـ}}$ ∴ جا ٤٠° = $\frac{١٢}{\text{أ جـ}}$

∴ أ جـ = $\frac{١٢}{\text{جا }٤٠°}$ = ١٨,٧ سم

ظا جـ = $\frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}}$ = $\frac{\text{أب}}{\text{ب جـ}}$ ∴ ظا ٤٠° = $\frac{١٢}{\text{ب جـ}}$ ∴ ب جـ = $\frac{١٢}{\text{ظا }٤٠°}$ = ١٤,٣ سم



∴ مساحة △ أ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ × أ ب × ب جـ = $\frac{١}{٢}$ × ١٢ × ١٤,٣ = ٨٥,٨ سم²

مثال [١٠]

△ ؟ ب جـ فية ؟ ب = ؟ جـ = ١٠سم ، ب جـ = ١٢سم اوجد جميع الدوال المثلثية للزاويتين ب ، جـ : ق(∠ب) ، ق(∠جـ) و أوجد مساحة المثلث ؟ ب جـ قربا الناتج لأقرب رقمين عشريين

الحل العمل نرسم ؟ ء ⊥ ب جـ

لإيجاد النسب المثلثية للزاوية جـ نشتغل على △ ؟ ء جـ القائم فى ء

ء ؟ ⊥ ب جـ ∴ ء منتصف ب جـ ∴ ءجـ = ٦سم

ومن فيثاغورث نوجد ؟ء = ٨سم

∴ جا جـ = $\frac{\text{مقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{٨}{١٠}$ ∴ جتاجـ = $\frac{\text{مجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{٦}{١٠}$ ∴ ظاجـ = $\frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{٨}{٦}$

لإيجاد النسب المثلثية للزاوية ب نشتغل على △ ؟ ء ب القائم فى ء

∴ جا ب = $\frac{\text{مقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{٨}{١٠}$ ∴ جتا ب = $\frac{\text{مجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{٦}{١٠}$ ∴ ظا ب = $\frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{٨}{٦}$

ق (ب) نضغط زر **Shift** ثم زر **tan** ثم ندخل الرقم $\frac{٨}{٦}$ ثم = فزر **,,,** فنحصل على

ق (ب) = ٤٨ً ٧َ ٥٣°

ق (جـ) نضغط زر **Shift** ثم زر **tan** ثم ندخل الرقم $\frac{٨}{٦}$ ثم = فزر **,,,** فنحصل على

ق (جـ) = ٤٨ً ٧َ ٥٣°

لإيجاد مساحة △ ؟ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ × ب جـ × ؟ ء = × ١٢ × ٨ = ٤٨سم^2

حل آخر للمطلوب ثانيا :

جا ب = $\frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{\text{؟ء}}{\text{؟ب}}$ جا ٤٨ً ٧َ ٥٣° = $\frac{\text{؟ء}}{١٠}$

؟ء = ١٠ جا ٤٨ً ٧َ ٥٣°

مساحة المثلث ؟ ب جـ = = $\frac{١}{٢}$ × ب جـ × ؟ ء = $\frac{١}{٢}$ × ١٢ × ١٠ جا ٤٨ً ٧َ ٥٣° = ٤٨سم^2

ملاحظة هامة

جيب أى زاوية حادة = جيب تمام الزاوية المتممة لها .

أى أن : فى أى مثلث

∵ △ ا ب جـ قائم فى ب

∴ ∠ ا تتمم ∠ جـ

∴ جا ا = جتا جـ

جا جـ = جتا ا **والعكس صحيح**

أى إذا كان ا ، جـ **زاويتان حادتان** ، جا ا = جتا جـ

∴ ق(∠ ا) + ق(∠ جـ) = ٩٠° **أى زاويتان متتامتان**

وتر
مقابل
مجاور
ا
ب
جـ

ملاحظة ٢

لأى زاوية ظا الزاوية = $\frac{\text{جا الزاوية}}{\text{جتا الزاوية}}$ **أى أن :** ظا جـ = $\frac{\text{جا جـ}}{\text{جتا جـ}}$ ، ظا ا = $\frac{\text{جا ا}}{\text{جتا ا}}$

مثال (١١)

إذا كان : جا ا = جتا ا حيث ا زاوية حادة احسب ق(∠ ا)

∵ جا ا = جتا ا　　∵ ا زاوية حادة

∴ ا + ا = ٩٠°　　∴ ٢ ا = ٩٠°　　∴ ا = ٤٥°

مثال (١٢)

إذا كان : جا(ا + ١٠°) = جتا ا فأوجد قيمة ا حيث (ا + ١٠°) زاوية حادة

∵ جا(ا + ١٠°) = جتا ا　　∴ (ا + ١٠°) ، ا متتامتان

∴ ا + ١٠° + ا = ٩٠°

∴ ٢ ا + ١٠ = ٩٠°　　∴ ٢ ا = ٨٠°　　∴ ا = ٤٠°

مثال (١٣)

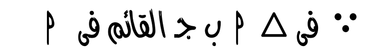
إذا كان ق(∠ ا) = ٧٥° ، جا ب = جتا ا حيث ب زاوية حادة احسب ق(∠ ب)

∵ جا ب = جتا ا　　∴ ا ، ب متتامتان　　∴ ا + ب = ٩٠°　　∵ ق(∠ ا) = ٧٥°

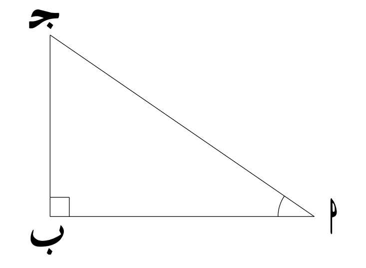
∴ ٧٥° + ب = ٩٠°　　∴ ب = ٩٠° − ٧٥° = ١٥°

مثال [١٤]

∆ أ ب جـ فيه ق(∠ ب) = ٩٠° اثبت أن : جا أ + جتا أ > ١



∵ فى ∆ أ ب جـ القائم فى أ



∵ جا أ = $\frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}}$ = $\frac{\text{ب جـ}}{\text{أ جـ}}$ .... (١)

∵ جتا أ = $\frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}}$ = $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}}$ .... (٢)

∵ مجموع طولى أى ضلعين فى مثلث أكبر من طول الضلع الثالث

∴ فى ∆ أ ب جـ : أ ب + ب جـ > أ جـ

∵ جا أ + جتا أ = $\frac{\text{ب جـ}}{\text{أ جـ}} + \frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}} = \frac{\text{ب جـ + أ ب}}{\text{أ جـ}} > \frac{\text{أ جـ}}{\text{أ جـ}}$ ∴ جا أ + جتا أ > ١

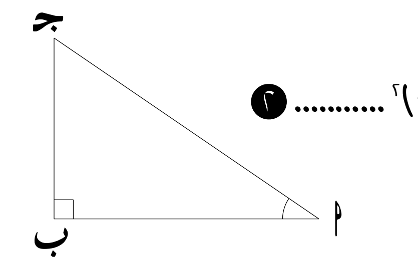
مثال [١٥]

∆ أ ب جـ فيه ق(∠ ب) = ٩٠° اثبت أن : جا² أ + جتا² أ = ١

∵ فى ∆ أ ب جـ **القائم فى** أ

∵ جا أ = $\frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}}$ = $\frac{\text{ب جـ}}{\text{أ جـ}}$ ∴ جا² أ = $\left(\frac{\text{ب جـ}}{\text{أ جـ}}\right)^2$ .... (١)

∵ جتا أ = $\frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}}$ = $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}}$ ∴ جتا² أ = $\left(\frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}}\right)^2$ .... (٢)



∵ **مجموع طولى أى ضلعين فى مثلث أكبر من طول الضلع الثالث**

∴ **فى** ∆ أ ب جـ **القائم فى** ب : (أ ب)² + (ب جـ)² = (أ جـ)²

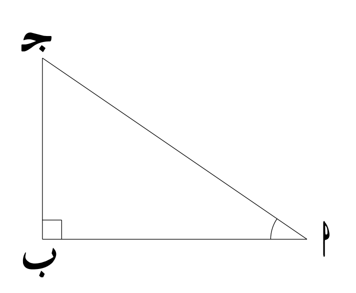
∵ جا² أ + جتا² أ = $\left(\frac{\text{ب جـ}}{\text{أ جـ}}\right)^2 + \left(\frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}}\right)^2 = \frac{(\text{ب جـ})^2 + (\text{أ ب})^2}{(\text{أ جـ})^2} = \frac{(\text{أ جـ})^2}{(\text{أ جـ})^2} = ١$

∴ جا² أ + جتا² أ = ١

مثال [١٦]

△ أ ب جـ فيه ق(∠ ب) = ٩٠°   **اثبت أن :** $\text{ظا أ} = \dfrac{\text{جا أ}}{\text{جتا أ}}$


∵ في △ أ ب جـ القائم في ب :



∵ الأيمن = $\text{ظا أ} = \dfrac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \dfrac{\text{ب جـ}}{\text{أ ب}}$ .... ❶

∵ $\text{جا أ} = \dfrac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = \dfrac{\text{ب جـ}}{\text{أ جـ}}$ .... ❷

∵ $\text{جتا أ} = \dfrac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} = \dfrac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}}$ .... ❸

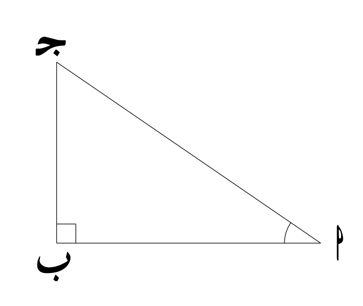
∴ الأيسر = $\dfrac{\text{جا أ}}{\text{جتا أ}} = \dfrac{\text{ب جـ}}{\text{أ جـ}} \div \dfrac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}} = \dfrac{\text{ب جـ}}{\text{أ جـ}} \times \dfrac{\text{أ جـ}}{\text{أ ب}} = \dfrac{\text{ب جـ}}{\text{أ ب}}$ .... ❹   من ❶ ، ❹

∴ الطرفان متساويان   ∴ $\text{ظا أ} = \dfrac{\text{جا أ}}{\text{جتا أ}}$

مثال [١٧]

△ أ ب جـ فيه ق(∠ ب) = ٩٠°   **اثبت أن :** $\text{ظا}^2\text{أ} + 1 = \dfrac{1}{\text{جتا}^2\text{أ}}$


∵ في △ أ ب جـ القائم في ب :



∵ $\text{ظا أ} = \dfrac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \dfrac{\text{ب جـ}}{\text{أ ب}}$ ∴ $\text{ظا}^2\text{أ} = \dfrac{(\text{ب جـ})^2}{(\text{أ ب})^2}$

∴ الأيمن = $\text{ظا}^2\text{أ} + 1 = \dfrac{(\text{ب جـ})^2}{(\text{أ ب})^2} + 1 = \dfrac{(\text{ب جـ})^2 + (\text{أ ب})^2}{(\text{أ ب})^2}$

∴ في △ أ ب جـ القائم في ب : $(\text{أ ب})^2 + (\text{ب جـ})^2 = (\text{أ جـ})^2$

∴ الأيمن = $\text{ظا}^2\text{أ} + 1 = \dfrac{(\text{أ جـ})^2}{(\text{أ ب})^2}$ .... ❶

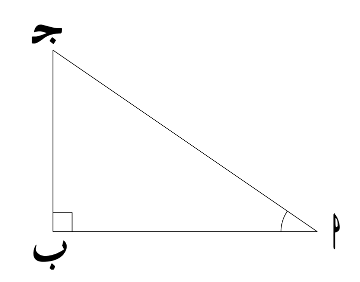
∵ الأيسر = $\dfrac{1}{\text{جتا}^2\text{أ}} = 1 \div \text{جتا}^2\text{أ}$ = $1 \div \left(\dfrac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}}\right)^2 = \dfrac{(\text{أ جـ})^2}{(\text{أ ب})^2}$ .... ❷   من ❶ ، ❷

∴ الطرفان متساويان   ∴ $\text{ظا}^2\text{أ} + 1 = \dfrac{1}{\text{جتا}^2\text{أ}}$

مثال [١٨]

△ أ ب جـ فيه ق(∠ ب) = ٩٠° ، **اثبت أن** : طا أ طا جـ = ١

∵ في △ أ ب جـ القائم في ب :



∵ ظا أ = $\frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{أ ب}}$

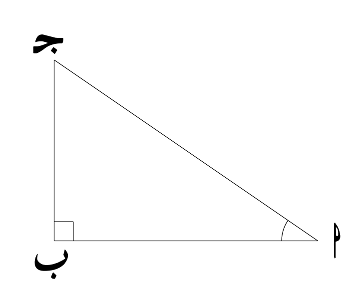
∵ ظا جـ = $\frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{ب جـ}}$

∴ الأيمن = طا أ طا جـ = $\frac{\text{ب جـ}}{\text{أ ب}} \times \frac{\text{أ ب}}{\text{ب جـ}} = ١$ ∴ الطرفان متساويان ∴ طا أ طا جـ = ١

مثال [١٩]

△ أ ب جـ فيه ق(∠ ب) = ٩٠° ، **اثبت أن** : جا أ جتا جـ + جتا أ جا جـ = ١

∵ في △ أ ب جـ القائم في ب :



∵ جا أ = $\frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{أ جـ}}$ .... ❶

∵ جتا أ = $\frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}}$ .... ❷

∵ جا جـ = $\frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}}$ .... ❸

∵ جتا جـ = $\frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{أ جـ}}$ .... ❹

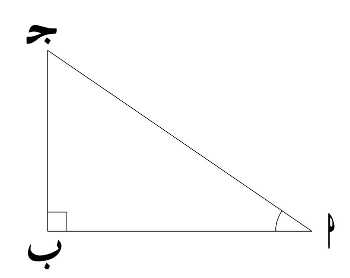
∴ الطرف الأيمن = جا أ جتا جـ + جتا أ جا جـ = $\frac{\text{ب جـ}}{\text{أ جـ}} \times \frac{\text{ب جـ}}{\text{أ جـ}} + \frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}} \times \frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}}$ =

$= \left(\frac{\text{ب جـ}}{\text{أ جـ}}\right)^2 + \left(\frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}}\right)^2 = \frac{(\text{ب جـ})^2 + (\text{أ ب})^2}{(\text{أ جـ})^2} = \frac{(\text{أ جـ})^2}{(\text{أ جـ})^2} = ١$

∴ الطرفان متساويان = جا أ جتا جـ + جتا أ جا جـ = ١

مثال [٢٠]

△ أ ب جـ فيه ق(∠ ب) = ٩٠° **اثبت أن** : جا أ + جتا جـ = ٢ جا أ



∵ جا أ = $\frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}}$ = $\frac{\text{ب جـ}}{\text{أ جـ}}$ .... ❶

∵ جتا جـ = $\frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}}$ = $\frac{\text{ب جـ}}{\text{أ جـ}}$ .... ❷

∴ الأيمن = جا أ + جتا جـ = $\frac{\text{ب جـ}}{\text{أ جـ}}$ + $\frac{\text{ب جـ}}{\text{أ جـ}}$ = ٢ $\frac{\text{ب جـ}}{\text{أ جـ}}$ = ٢ جا أ

∴ الطرفان متساويان

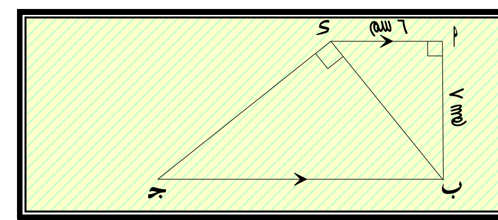
∴ جا أ + جتا جـ = ٢ جا أ

مثال [٢١]

فى الشكل المقابل : أ ب جـ ء **شكل رباعى فيه** :

ق(∠ أ) = ق(∠ ب ء جـ) = ٩٠° ، $\overline{\text{أ ء}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

، أ ء = ٦ سم ، أ ب = ٨ سم ، **احسب طول** : $\overline{\text{ء جـ}}$



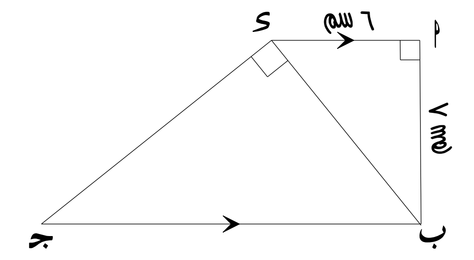
∵ فى △ أ ب ء : ∵ ق(∠ أ) = ٩٠°

∴ من فيثاغورث ∴ ب ء = ١٠ سم

∵ $\overline{\text{أ ء}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ء ب}}$ قاطع لهما

∴ ق(∠ أ ء ب) = ق(∠ ء ب جـ)

∴ ظا(∠ أ ء ب) = ظا(∠ ء ب جـ)



∴ $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ ء}}$ = $\frac{\text{ء جـ}}{\text{ء ب}}$ ∴ $\frac{٨}{٦}$ = $\frac{\text{ء جـ}}{١٠}$ ∴ ء جـ = ١٠ × $\frac{٨}{٦}$ = ١٣,٣ تقريبا

حاول الحل بأساليب أخرى

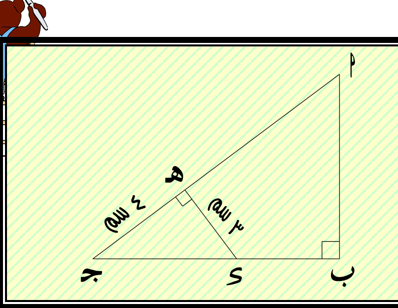
مثال [٢٢]

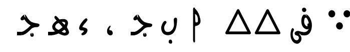
في الشكل المقابل : أ ب جـ مثلث فيه :

ق(∠ ب) = ٩٠° ، ء ∈ ب جـ ، هـ ∈ أ جـ بحيث ء هـ ⊥ أ جـ

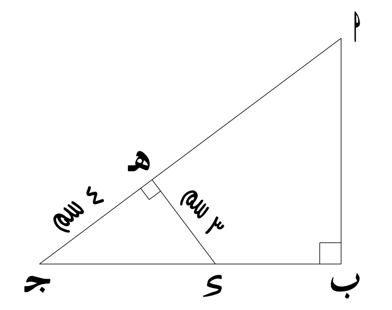
، ء هـ = ٣سم ، هـ جـ = ٤سم

أثبت أن : جا أ جتا جـ + جا جـ جتا(∠ هـ ء جـ) = ١





∵ في ΔΔ أ ب جـ ، ء هـ جـ



∵ ∠ جـ مشتركة ، ق(∠ ب) = ق(∠ ء هـ جـ) = ٩٠°

∴ ق(∠ أ) = ق(∠ هـ ء جـ)

في Δ ء هـ جـ القائم في (∠ ء هـ جـ) ∵ ء جـ = ٥ سم من فيثاغورث

∴ جا جـ = $\frac{ء هـ}{ء جـ}$ = $\frac{٣}{٥}$ ∴ جتا جـ = $\frac{هـ جـ}{ء جـ}$ = $\frac{٤}{٥}$

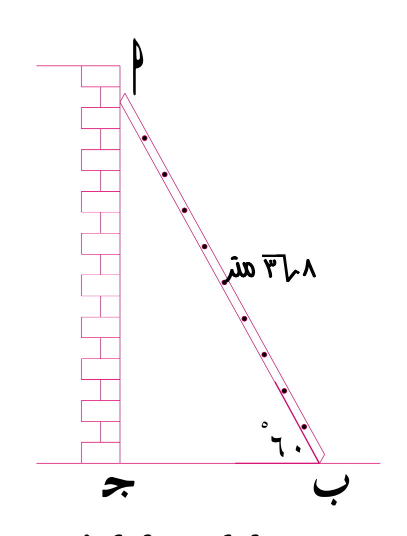
في Δ أ ب جـ القائم في ب ∵ جا أ = جا(∠ هـ ء جـ) = $\frac{هـ جـ}{ء جـ}$ = $\frac{٤}{٥}$

∵ جتا(∠ هـ ء جـ) = $\frac{ء هـ}{ء جـ}$ = $\frac{٣}{٥}$

جا أ جتا جـ + جا جـ جتا(∠ هـ ء جـ) = $(\frac{٤}{٥})(\frac{٤}{٥}) + (\frac{٣}{٥})(\frac{٣}{٥}) = \frac{١٦}{٢٥} + \frac{٩}{٢٥} = ١$

مثال [٢٣]

سلم أ ب طوله ٨√٣ متر يستند بطرفة العلوي أ على حائط رأسي وطرفه السفلى ب على أرض أفقية فإذا كان جـ هى مسقط النقطة أ على الأرض و كان زاوية ميل السلم على الأرض = ٦٠ احسب طول أ جـ



الحل

حا ب = $\frac{مقابل}{وتر}$ = $\frac{أ جـ}{أ ب}$

حا ٦٠° = $\frac{أ جـ}{٨√٣}$ بضرب طرفين × وسطين

أ جـ = ٨√٣ حا ٦٠° = ٨√٣ × ($\frac{√٣}{٢}$) = $\frac{٨ × ٣}{٢}$ = ١٢ متر

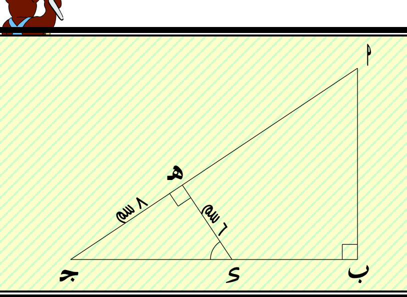
مثال [٢٤]

في الشكل المقابل : $\triangle$ أ ب جـ قائم الزاوية في ب

، ء $\in$ $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{ء هـ}}$ $\perp$ $\overline{\text{أ جـ}}$

، ء هـ = ٦ سم ، ، هـ جـ = ٨ سم

، أوجد جا أ ، جتا أ



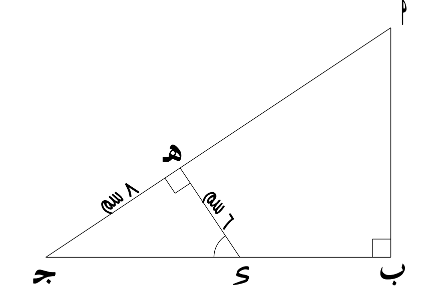
في $\triangle$ ء جـ هـ

$\because$ من فيثاغورث $\therefore$ (ء جـ)^2 = (ء هـ)^2 + (هـ جـ)^2

= ٣٦ + ٦٤ = ١٠٠

$\therefore$ ء جـ = ١٠ سم

$\because$ $\angle$ أ ، $\angle$ جـ متتامتان



$\therefore$ جا أ = جتا جـ = $\frac{٨}{١٠}$ = $\frac{٤}{٥}$

$\therefore$ جتا أ = جا جـ = $\frac{٦}{١٠}$ = $\frac{٣}{٥}$

مثال [٢٥]

أ ب جـ ء شبه منحرف متساوى الساقين فيه $\overline{\text{أ ء}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ ، ء جـ = أ ب = ٥ سم ، أ ء = ٤ سم

، ب جـ = ١٢ سم **أثبت أن** : $\frac{\text{٥ ظا ب جتا جـ}}{\text{جا}^2\text{ ب + جتا}^2\text{ جـ}}$ = ٣

نرسم $\overline{\text{أ و}}$ $\perp$ $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{ء هـ}}$ $\perp$ $\overline{\text{ب جـ}}$

$\therefore$ الشكل أ و هـ ء مستطيل ، و هـ = ٤ سم $\therefore$ ب و + هـ جـ = ٨ سم

$\because$ من تطابق $\triangle\triangle$ أ و ب ، ء هـ جـ $\therefore$ ب و = هـ جـ = ٤ سم

$\therefore$ في $\triangle$ أ و ب القائم في و :



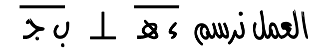
$\because$ (أ و)^2 = (أ ب)^2 − (ب و)^2 = ٢٥ − ١٦ = ٩

$\therefore$ أ و = ٣ سم $\therefore$ أ و = ء هـ = ٣ سم

$\because$ البسط = ٥ ظا ب جتا جـ = ٥ × $\frac{٣}{٤}$ × $\frac{٤}{٥}$ = ٣

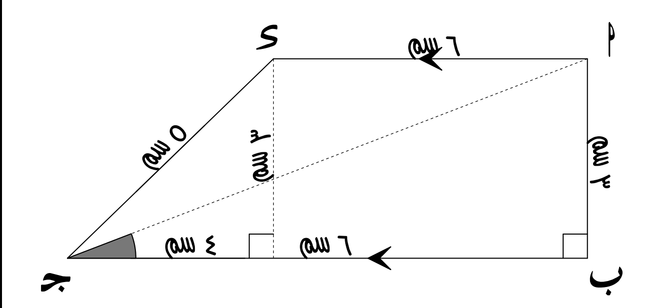
$\because$ المقام = جا^2 ب + جتا^2 جـ = $(\frac{٣}{٥})^2$ + $(\frac{٤}{٥})^2$ = $\frac{٩}{٢٥}$ + $\frac{١٦}{٢٥}$ = $\frac{٢٥}{٢٥}$ = ١

$\therefore$ المطلوب = $\frac{\text{٥ ظا ب جتا جـ}}{\text{جا}^2\text{ ب + جتا}^2\text{ جـ}}$ = $\frac{٣}{١}$ = ٣


مثال[٢٦]

ٲ ب جـ ء شبه منحرف فيه $\overline{ٲ ء} \parallel \overline{ب جـ}$ ، ق(∠ ب) = ٩٠° ، ٲ ب = ٣ سم ، ٲ ء = ٦ سم

، ب جـ = ١٠ سم ، **أثبت أن** : جتا جـ − ظا(∠ ٲ جـ ب) = $\frac{١}{٢}$



العمل نرسم $\overline{ء هـ} \perp \overline{ب جـ}$

∵ ق(∠ ب) = ٩٠° ، $\overline{ء هـ} \perp \overline{ب جـ}$

، $\overline{ٲ ء} \parallel \overline{ب جـ}$

∴ ٲ ب هـ ء مستطيل

∴ ٲ ب = ء هـ = ٣ سم

∵ فى △ ء هـ جـ القائم فى هـ

∵ من فيثاغورث (ء جـ)٢ = (ء هـ)٢ + (هـ جـ)٢ = ٩ + ١٦ = ٢٥

∴ ء جـ = ٥ سم

فى ∴ ٲ ب جـ القائم فى ب

∵ ظا(∠ ٲ جـ ب) = $\frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{٣}{١٠}$

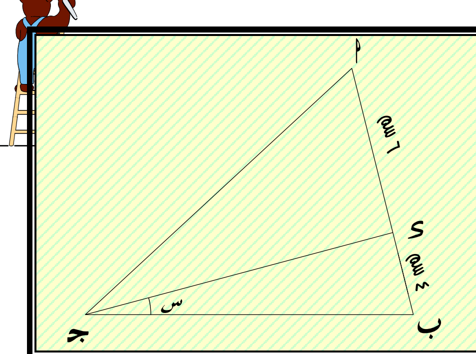
∵ فى المثلث ء جـ هـ

∵ جتا(∠ ء جـ ب) = جتا(∠ ء جـ هـ) = $\frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{٤}{٥}$

∴ المطلوب = جتا جـ − ظا(∠ ٲ جـ ب) = $\frac{٤}{٥} - \frac{٣}{١٠} = \frac{٨ - ٣}{١٠} = \frac{٥}{١٠} = \frac{١}{٢}$



مثال [٢٧]



فى الشكل المقابل :

م ب جـ مثلث متساوى الأضلاع ، ى ∈ $\overline{\text{م ب}}$

بحيث : م ى = ٦ سم ، ى ب = ٤ سم ،

إذا كان : ك ظا س = $\sqrt{٣}$

فأوجد قيمة ك

العمل : نرسم $\overline{\text{ى هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$ وتقطعها فى هـ

∵ م ب جـ متساوى الأضلاع .

∴ ق(∠ ب) = ٦٠°

، فى △ ب ى هـ :

∵ $\overline{\text{ى هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$

∴ ق(∠ ى هـ ب) = ٩٠°

∴ ق(∠ ب ى هـ) = ١٨٠° − (٦٠° + ٩٠°) = ٣٠°

∴ ب هـ = $\frac{١}{٢}$ ب ى = ٢سم

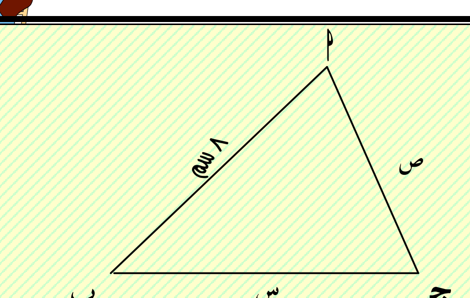
من فيثاغورث ∵ (ى هـ)^٢ = (ى ب)^٢ − (ب هـ)^٢

∴ ى هـ = $\sqrt{١٢}$ = ٢$\sqrt{٣}$ سم

∵ ب جـ = م ب = ١٠ سم ∴ هـ جـ = ب جـ − ب هـ = ١٠ − ٢ = ٨ سم

∴ ظا س = $\frac{\text{ى هـ}}{\text{هـ جـ}}$ = $\frac{٢\sqrt{٣}}{٨}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$ ∵ ك ظا س = $\sqrt{٣}$

∴ ك × $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$ = $\sqrt{٣}$ ∴ ك = $\sqrt{٣}$ × $\frac{٤}{\sqrt{٣}}$ = ٤



مثال [٢٨]

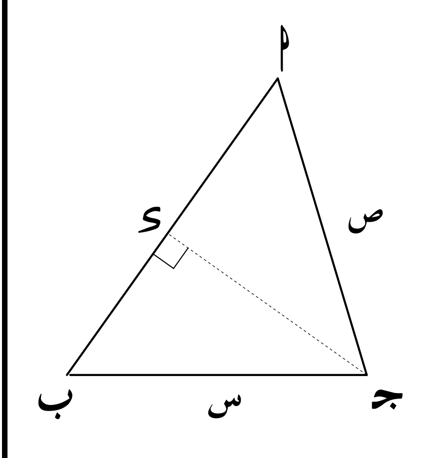
فى الشكل المقابل :

مثلث م ب جـ ، م ب = ٨ سم

، م جـ = ص ، ب جـ = س

أوجد قيمة : س جتا ب + ص جتا م

العمل : نرسم $\overline{\text{جـ ء}} \perp \overline{\text{م ء}}$



∵ جتا ب = $\frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{\text{ب ء}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{ب ء}}{\text{س}}$ .... ❶

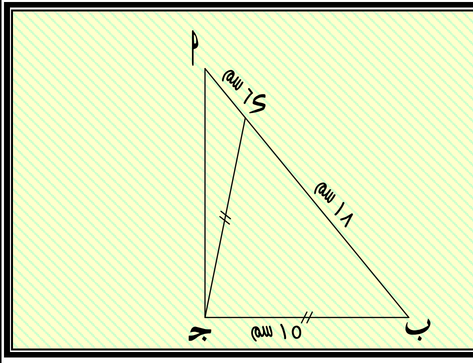
∵ جتا م = $\frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{\text{م ء}}{\text{م جـ}} = \frac{\text{م ء}}{\text{ص}}$ .... ❶

∴ الطرف الأيمن = س جتا ب + ص جتا م = س × $\frac{\text{ب ء}}{\text{س}}$ + ص × $\frac{\text{م ء}}{\text{ص}}$

= ب ء + م ء = م ب = ٨ سم

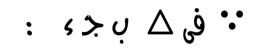
مثال [٢٩]

فى الشكل المقابل :



م ب جـ مثلث ب ء = ١٨ سم ، م ء = ٦سم

، ب جـ = ١٥سم **أوجد :** ظا (∠ ب م جـ)



العمل نرسم $\overline{\text{هـ جـ}} \perp \overline{\text{ب ء}}$

∵ فى △ ب جـ ء :

∵ $\overline{\text{جـ هـ}} \perp \overline{\text{ب ء}}$ ∵ جـ ب = جـ ء

∴ هـ منتصف ب ء ∴ ب هـ = ء هـ = ٩ سم

ن فى △ ب هـ جـ القائم فى هـ

∵ $(\text{هـ جـ})^2 = (\text{ب جـ})^2 - (\text{ب هـ})^2 = ٢٢٥ - ٨١ = ١٤٤$

∴ هـ جـ = ١٢ سم ∵ م هـ = ٦ + ٩ = ١٥

∴ ظا (∠ ب م جـ) = $\frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{\text{هـ جـ}}{\text{م هـ}} = \frac{١٢}{١٥} = \frac{٤}{٥} = ٠,٨$

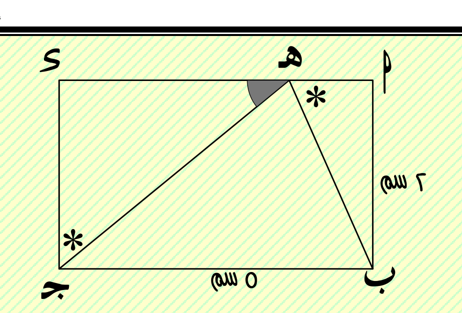


✍ **مثال [٣٠]**

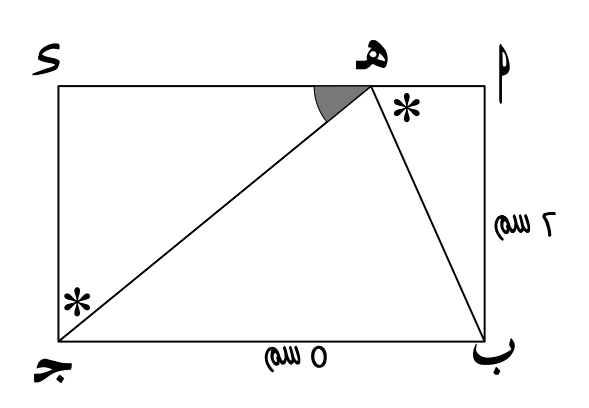
ا ب جـ ء **مستطيل فيه :** ا هـ > هـ ء ، ا ب = ٢سم

، ب جـ = ٥سم ، ق(∠ ا هـ ب) = ق(∠ هـ جـ ء)

أوجد : ظا(∠ جـ هـ ء)



∵ ظا(∠ ا هـ ب) = $\frac{ا ب}{ا هـ}$ = $\frac{٢}{ا هـ}$ .... ❶



∵ فى △ هـ ء جـ :

ظا(∠ ء جـ هـ) = $\frac{ء هـ}{ء جـ}$ = $\frac{ء هـ}{٢}$ .... ❷

∴ ∵ ق(∠ ا هـ ب) = ق(∠ هـ جـ ء)

∴ ظا(∠ ا هـ ب) = ظا(∠ ء جـ هـ)

∴ $\frac{٢}{ا هـ}$ = $\frac{ء هـ}{٢}$ .... ❸ ∵ ا ء = ب جـ = ٥

∴ ا هـ + هـ ء = ٥

∴ ا هـ = ٥ − هـ ء .... ❹ من ❹ فى ❸

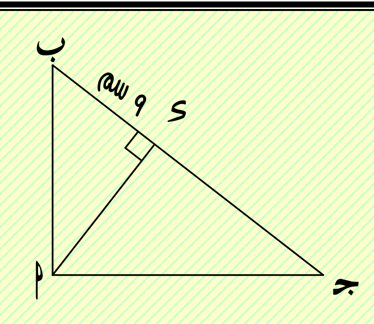
∴ $\frac{٢}{٥ - هـ ء}$ = $\frac{هـ ء}{٢}$ ∴ ٤ = ٥ هـ ء − (هـ ء)^{2}

∴ (هـ ء)^{2} − ٥ هـ ء − ٤ = ٠

∴ (هـ ء − ١)(هـ ء − ٤) = ٠ ∵ هـ ء < ا ء

∴ هـ ء = ٤ سم

✍ مثال [٣١]



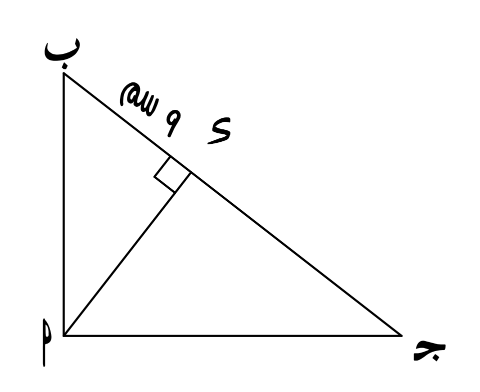
فى الشكل المقابل :

م ب جـ **مثلث** ، ء ∈ $\overline{\text{ب جـ}}$ **بحيث** $\overline{\text{م ء}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$ ، ب ء = ٩سم

، **فإذا كان :** جا (∠ ب م ء) = جتا (∠ جـ م ء) = $\frac{٣}{٥}$

فأوجد : مساحة △ م ب جـ

∵ فى △ م ء ب القائم فى ء



∵ جا (∠ ب م ء) = $\frac{\text{ء ب}}{\text{م ب}}$ = $\frac{٩}{\text{م ب}}$

∴ $\frac{٣}{٥}$ = $\frac{٩}{\text{م ب}}$

∴ م ب = ١٥

∴ من فيثاغورث

∴ $(\text{م ء})^٢$ = ٢٢٥ − ٨١ = ١٤٤		∴ م ء = ١٢ سم

∵ جتا (∠ جـ م ء) = $\frac{٣}{٥}$ = $\frac{\text{م ء}}{\text{م جـ}}$		∴ $\frac{١٢}{\text{م جـ}}$ = $\frac{٣}{٥}$

∴ م جـ = ٢٠ سم

∴ فى △ م ء جـ : $(\text{ء جـ})^٢$ = ٤٠٠ − ١٤٤ = ٢٥٦

∴ ء جـ = ١٦ سم

∴ ب جـ = ٩ + ١٦ = ٢٥ سم

∴ مساحة △ م ب جـ = $\frac{١}{٢}$ × ب جـ × م ء = $\frac{١}{٢}$ × ٢٥ × ١٢ = ١٥٠ سم

تمارين على النسب المثلثية

[١] أكمل كل مما يأتي :

① ٤٩° ٥٤′ ٢١″ = ...بالدرجات
② ٢٦° ١٤′ ١١″ = ... بالدرجات
③ ٥٦° ٣٠′ ٤٥″ = ... بالدرجات
④ ٧٠° ١٥′ ٢٠″ = ... بالدرجات
⑤ ٣٠,٦٢٣° = ... (بالدرجات والدقائق والثوانى)
⑥ ٤٠,٣٧٥° =.........(بالدرجات والدقائق والثوانى)
⑦ ٧٢,٦٩٨° = ... (بالدرجات والدقائق والثوانى)
⑧ ٦٩,٣٢٦١° = ... (بالدرجات والدقائق والثوانى)

[٢] باستخدام الشكل المقابل :

حا س = ...　　　حتا ع = ...

طا س = ...　　　طا ع = ...

س ، ص ، ع ، ٢٥ ، ٧ ، ٢٤

[٣] إذا كانت النسبة بين قياسى زاويتين متكاملتان ٧ : ١٢ فأوجد القياس الستينى لكل منهما

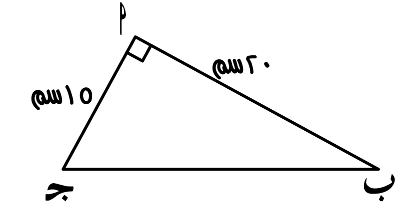
[٤] إذا كانت النسبة بين قياسى زاويتين متتامتين ١ : ٧ فأوجد القياس الستينى لكل منهما

[٥] إذا كانت النسبة بين قياسات الزوايا الداخلة لمثلث ٣ : ٤ : ٧ فأوجد القياس الستينى لكل زاوية .

[٦] △ ﻫ ب جـ قائم الزاوية فى ب فيه : ﻫ ب = ٨سم ، ب جـ = ١٥سم

أكتب ما تساويه كل من النسب المثلثية الآتية : حا جـ ، طا ﻫ ، حتا ﻫ ، حتا جـ ، طا جـ ، حا ﻫ

[٧] فى الشكل المقابل :



△ ﻫ ب جـ فيه : ق(∠ ﻫ) = ٩٠° ، ﻫ جـ = ١٥سم ، ﻫ ب = ٢٠سم

اثبت أن : حتا جـ حتا ب − حا جـ حا ب = صفر

[٨] س ص ع مثلث قائم الزاوية فى ص فيه س ع = ١٣سم ، ص ع = ١٢سم

أوجد قيمة كل من ❶ حا س حتا ع + حتا س حا ع　❷ حتا س حتا ع − حا س حا ع

[٩] س ص ع △ قائم الزاوية فى ع ، س ع = ٧سم ، س ص = ٢٥سم

أوجد قيمة كل من : ❶ طا س × طا ص　❷ حا² س + حا² ص

[١٠] △ ﻫ ب جـ قائم الزاوية فى ﻫ فيه : ﻫ ب = ٩سم ، ﻫ جـ = ١٢سم أوجد قيمته : ٢حتا ب طا ب − حا جـ

[١١] △ أ ب جـ قائم الزاوية فى ب فيه : ب جـ = ٤سم ، أ جـ = ٥سم اثبت أن : حا^{٢} أ – حتا^{٢} أ = ٢حا^{٢} أ – ١

[١٢] △ س ص ع قائم الزاوية فى ص فإذا كان : ص ع = ٢س ص فأوجد قيمة : طا ع ، طا س ، حتا ع ، حتا س

[١٣] أ ب جـ △ قائم الزاوية فى ب فإذا كان $\sqrt{٥}$ أ ب = ٢ أ جـ فأوجد جميع النسب المثلثية الأساسية للزاوية جـ .

[١٤] △ أ ب جـ قائم الزاوية فى ب ، جا جـ = ٠,٦ فأوجد قيمة : حا أ حتا جـ + حتا أ حا جـ

[١٥] △ أ ب جـ قائم الزاوية فى ب ، ١٣جا جـ – ٥ = ٠ فأوجد قيمة : حا أ حتا جـ + حتا أ حا جـ

[١٦] **فى أى مثلث** أ ب جـ **قائم الزاوية فى** ب **أثبت أن :** جا^{٢} أ + جا^{٢} جـ = ١

[١٧] أ ب جـ △ سم $\overleftrightarrow{أ ء}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$ فقطعها فى ء فإذا كان : أ ب = ١٣سم ، أ جـ = ٢٠سم ، جـ ء = ١٦سم ❶ أوجد قيمة كلا من حا ب ، حتا جـ ، حتا(ب أ ء) ، طا(ء أ جـ) ❷ $\frac{\text{ظا أ} - \text{ظا ب}}{١ + \text{ظا أ ظا ب}}$

[١٨] △ أ ب جـ قائم الزاوية فى(∠ أ) أ ب = ٧سم ، سم $\overleftrightarrow{أ ء}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$ حيث ء ∈ $\overline{ب جـ}$ ، حيث ب ء = ١,٩٦سم احسب جا ب ، ظا جـ

[١٩] أ ب جـ ء مستطيل فيه أ ب = ٨سم ، ب جـ = ١٢ سم ، نصفت $\overline{ب جـ}$ فى هـ

اوجد : ❶ظا(∠ ب أ جـ) – جا(∠ ب هـ أ) ❷ $\frac{١}{\text{جا}^{٢}(\angle \text{أ جـ ب})}$ + ظا(∠ ب أ هـ)

[٢٠] أ ب جـ ء شبه منحرف فيه $\overline{أ ء}$ // $\overline{ب جـ}$ ، أ ء = ٧سم ، ء جـ = ١٠سم ، جـ ب = ٢٨سم ، سم $\overline{أ هـ}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$ ، إذا كان أ هـ = ٨سم احسب قيمة : $\frac{١ + \text{جا ب جتا جـ}}{\text{جا ب}}$

[٢١] أ ب جـ ء شبه منحرف متساوى الساقين فيه $\overline{أ ء}$ // $\overline{ب جـ}$ ، أ ء = أ ب = ء جـ = ٥ ، ب جـ = ١١سم احسب ق(∠ ب) ، ق(∠ أ) ، مساحة شبه المنحرف أ ب جـ ء

[٢٣] أ ب جـ ء شبه منحرف متساوى الساقين فيه $\overline{أ ء}$ // $\overline{ب جـ}$ ، أ ء = ٦سم ، ء جـ = ٥سم ، جـ ب = ١٢سم

اثبت أن : ❶ جا^{٢} ب + جتا^{٢} جـ = ١ ❷ احسب مساحة شبه المحرف أ ب جـ ء

✍ **[٢٤]** م ب جـ ء شبه منحرف فيه $\overline{م ء} // \overline{ب جـ}$ ، م ء = ٧سم ، ب جـ = ١٠سم ، م ب = ٤سم

، ق(∠ب) = ٩٠° أثبت أن : جتا(∠ء جـ ب) − ظا(∠م جـ ب) = $\frac{١}{٥}$

✍ **[٢٥]** م ب جـ ء شبه منحرف متساوى الساقين فيه $\overline{م ء} // \overline{ب جـ}$ ، م ء = ٤سم ، ب جـ = ١٢سم ، م ب = ٥سم

أثبت أن $\frac{\text{٥ظا ب جا جـ}}{\text{جا}^2\text{ جـ + جتا}^2\text{ ب}}$ = ٣

✍ **[٢٦]** م ب جـ ء شبه منحرف فيه $\overline{م ء} // \overline{ب جـ}$ ، ق(∠ب) = ٩٠ ، فإذا كان م ب = ٣سم ، م ء =٦سم ، ب جـ = ١٠ سم أثبت أن : جتا(∠ء جـ ب) − ظا(∠م جـ ب) = $\frac{١}{٢}$

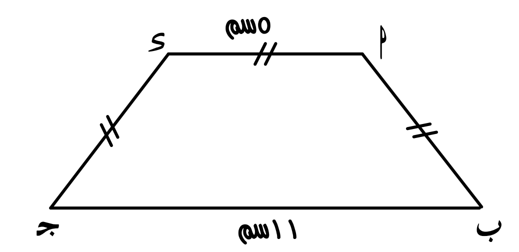


✍ **[٢٧]** م ب جـ ء شبه منحرف متساوى الساقين فيه :

م ب = م ء = ء جـ = ٥سم ، ب جـ = ١١سم .

أوجد : ق(∠ب) ، ق(∠م)

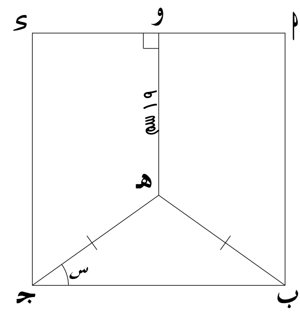
مساحة شبه المنحرف م ب جـ ء .



✍ **[٢٨]** إذا كانت الزاويتان م ، ب زاويتان حادتين موجبتين ، وكانت ظا م = $\frac{٣}{٤}$ ، جتا ب = $\frac{١٢}{١٣}$

أوجد قيمة: ❶ ظا م + ظا ب ❷ جتا م جتا ب − جا م جا ب ❸ جتا ب + ظا م

✍ **[٢٩]** إذا كان جا م + جا ب = $\frac{٧}{٥}$ ، جا م − جا ب = ٠,٢ أوجد جميع الدوال المثلثية للزاويتين م ، ب



✍ **[٣٠] في الشكل المقابل :**

م ب جـ ء **مربع طول ضلعه** ٢٤ سم ، هـ **نقطة داخله بحيث** ب هـ = هـ جـ

، و هـ = ١٩ سم ، $\overline{و هـ} \perp \overline{م ء}$ **فإذا كان :** ك(جتا س − جا س) = $\frac{١}{١٣}$

احسب قيمة ك

✍ **[٣١]** △ م ب جـ متساوى الساقين محيطه = ٣٦سم وطول قاعدته ب جـ = ١٠سم

أوجد قيمة ❶ $\frac{١}{\text{جتا ب}} + \frac{١}{\text{جتاجـ}}$ ، ❷ $\frac{\text{ظا ب جتا جـ + جا جـ}}{\text{جتا جـ}}$

[٣٢] ∆ أ ب جـ مثلث متساوى الساقين فيه أ ب = أ جـ = ١٣سم ، ب جـ = ١٠سم

أوجد : ق(∠ب) مساحة ∆ أ ب جـ

[٣٣] أ ب جـ مثلث متساوى الساقين فيه أ ب = أ جـ = ١٢,٦سم ، ق(∠جـ) = ٢٤ َ ٨٤ °

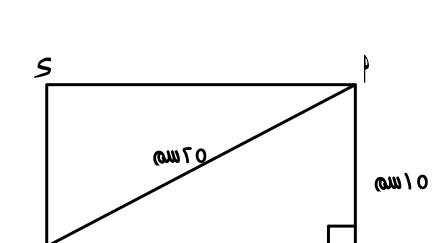
أوجد لأقرب رقم عشرى طول $\overline{ب جـ}$.

[٣٤] أ ب جـ ء متوازى أضلاع مساحته =٩٦سم² ، ب هـ : هـ جـ = ١ : ٣

، $\overline{أ هـ}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$ ، أ هـ = ٨سم

احسب طول $\overline{أ ء}$ ، ق(∠ب) ، طول $\overline{أ ب}$ لأقرب رقم عشرى واحد .

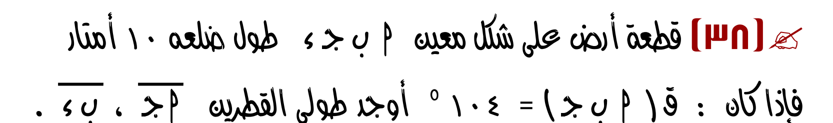
[٣٥] أ ب جـ ء مستطيل طول قطره $\overline{أ جـ}$ = ٢٤سم ، ق(∠أ جـ ب) = ٢٥ ° أوجد طول $\overline{ب جـ}$



[٣٦] أ ب جـ ء مستطيل فيه : أ ب = ١٥سم ، أ جـ = ٢٥سم

أوجد : ق(أ جـ ب) ، مساحة المستطيل أ ب جـ ء .

[٣٧] يسير شخص فى طريق منحدر يميل على سطح الأرض الأفقى بزاوية قياسها ٢٢ ° فإذا سار مسافة ٥٠٠ متر فما مقدار ارتفاعه عن سطح الأرض لأقرب متر



[٣٨] قطعة أرض على شكل معين أ ب جـ ء طول ضلعه ١٠ أمتار

فإذا كان : ق(أ ب جـ) = ١٠٤ ° أوجد طولى القطرين $\overline{أ جـ}$ ، $\overline{ب ء}$.

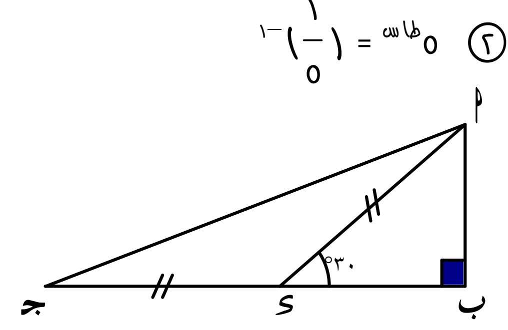


أوجد قيمة س فى كلا مما يأتى : (١) حتا س طا س = $\frac{١}{٢}$ (٢) ٥^طا س = $(\frac{١}{٥})^{-١}$

[٣٩] ∆ أ ب جـ قائم الزاوية فى ب

، ق(∠أ ء ب) = ٣٠ ° ، أ ء = ء جـ ،

أ ب = ١سم اثبت أن : طا ١٥ ° = ٢ − √٣



[٤٠] أ ب جـ ء شبه منحرف فيه : $\overline{أ ب}$ // $\overline{ء جـ}$ ، ق(∠أ ب جـ) = ٩٠° ، أ ب = ٦سم ، ب جـ = ٨سم ، ء جـ = ٢١سم أوجد كلا من : ❶ طول $\overline{أ ء}$ ❷ النسب المثلثية للزاوية ء



جا ٣٠° = $\frac{1}{2}$ جتا ٣٠° = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ظا ٣٠° = $\frac{1}{\sqrt{3}}$

جا ٦٠° = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ جتا ٦٠° = $\frac{1}{2}$ ظا ٦٠° = $\sqrt{3}$

جا ٤٥° = $\frac{1}{\sqrt{2}}$ جتا ٤٥° = $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ظا ٤٥° = ١

الدالة	٣٠	٦٠	٤٥
جا	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
جتا	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
ظا	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	١

مثال [١]

اوجد ق (ب) فى الحالات التالية ① جا ب = ٠,٨ ② جتا ب = ٠,٤٥٦ ③ ظا ب = ١,٢٣٥

① جا ب = ٠,٨

ق (ب) نضغط زر **Shift** ثم زر **Sin** ثم ندخل الرقم **٠.٨** ثم = فزر **° ' "**

فنحصل على ٤٨" ٧' ٥٣°

② جتا ب = ٠,٤٥٦

ق (ب) نضغط زر **Shift** ثم زر **COS** ثم ندخل الرقم **٠.٤٥٦** ثم = فزر **° ' "**

فنحصل على ١٤" ٥٢' ٦٢°

③ ظا ب = ١,٢٣٥

ق (ب) نضغط زر **hiftS** ثم زر **tan** ثم ندخل الرقم **١.٢٣٥** ثم = فزر **° ' "**

فنحصل على ٨' ٥١°

مثال [٢]

بدون استخدام الحاسبة أوجد قيمة : جا ٣٠ + جتا ٦٠ + ظا ٤٥

جا ٣٠ + جتا ٦٠ + ظا ٤٥ = $\frac{١}{٢} + \frac{١}{٢} + ١ = ١ + ١$

مثال [٣]

بدون استخدام الحاسبة أوجد قيمة : جا٣٠° جتا٦٠° − جتا ٣٠° جا٦٠°

جا٣٠° جتا٦٠° − جتا٣٠° جا٦٠° = $(\frac{١}{٢})(\frac{١}{٢}) - (\frac{\sqrt{٣}}{٢})(\frac{\sqrt{٣}}{٢}) = \frac{١}{٤} - \frac{٣}{٤} = -\frac{٢}{٤} = -\frac{١}{٢}$

مثال [٤]

بدون استخدام الحاسبة أوجد قيمة : جتا٤٥ ظا ٤٥ − $\frac{\text{جا٤٥}}{\text{ظا٤٥}}$

جتا٤٥ ظا ٤٥ − $\frac{\text{جا٤٥}}{\text{ظا٤٥}} = (\frac{١}{\sqrt{٢}})(١) - \frac{١}{\sqrt{٢}} \div ١ = \frac{١}{\sqrt{٢}} - \frac{١}{\sqrt{٢}}$ = صفر

مثال [٥]

بدون استخدام الحاسبة أوجد قيمة : ٤جتا ٣٠° جا ٦٠° − ظا^{٢} ٦٠° + جا ٣٠°

٤جتا ٣٠° جا ٦٠° − ظا^{٢} ٦٠° + جا ٣٠° =

$= ٤(\frac{\sqrt{٣}}{٢})(\frac{\sqrt{٣}}{٢}) - (\sqrt{٣})^{٢} + \frac{١}{٢} = ٤(\frac{٣}{٤}) - ٣ + \frac{١}{٢} = ٣ - ٣ + \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢}$

مثال [٦]

بدون استخدام الحاسبة أوجد قيمة : جا^{٢} ٤٥° + جتا^{٢} ٤٥° −٢جا٤٥° جتا٤٥°

جا^{٢} ٤٥° + جتا^{٢} ٤٥° −٢جا٤٥° جتا٤٥° = $(\frac{١}{\sqrt{٢}})^{٢} + (\frac{١}{\sqrt{٢}})^{٢} - ٢(\frac{١}{\sqrt{٢}})(\frac{١}{\sqrt{٢}})$

$= \frac{١}{٢} + \frac{١}{٢} - ٢ \times \frac{١}{٢} = ١ - ١$ = صفر

مثال [٧]

بدون استخدام الحاسبة أوجد قيمة : ٢جا٤٥ جتا٤٥° − جا٦٠° جتا ٣٠°

٢جا٤٥ جتا٤٥ − جا٦٠ جتا ٣٠ = $٢(\frac{١}{\sqrt{٢}})(\frac{١}{\sqrt{٢}}) - (\frac{\sqrt{٣}}{٢})(\frac{\sqrt{٣}}{٢}) = ٢(\frac{١}{٢}) - \frac{٣}{٤} = ١ - \frac{٣}{٤} = \frac{١}{٤}$

مثال [٨]

بدون استخدام الحاسبة أوجد قيمة : $\dfrac{\text{٤جا}30^\circ - 1}{\text{جتا}60^\circ} + \dfrac{\text{٥ جتا}60^\circ}{\text{ظا}45^\circ}$

$$\dfrac{\text{٤جا}30^\circ - 1}{\text{جتا}60^\circ} + \dfrac{\text{٥ جتا}60^\circ}{\text{ظا}45^\circ} = \dfrac{4\left(\frac{1}{2}\right) - 1}{\frac{1}{2}} + \dfrac{5 \times \frac{1}{2}}{1}$$

$$= (2-1) \div \frac{1}{2} + \frac{5}{2} = 1 \times 2 + 2.5 = 4.5$$

مثال [٩]

بدون استخدام الحاسبة أوجد قيمة : $\dfrac{\text{٢جتا ٦٠ ظا ٤٥} - \text{جا٦٠}}{\text{جتا٣٠ جتا٦٠}}$

$$\dfrac{\text{٢جتا ٦٠ ظا ٤٥} - \text{جا٦٠}}{\text{جتا٣٠ جتا٦٠}} = \dfrac{2\left(\frac{1}{2}\right)(1) - \frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \div \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$= \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}} - \frac{4\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}} - 2$$

مثال [١٠]

بدون استخدام الحاسبة أوجد قيمة : (جتا ٤٥ + جا ٦٠)(جا ٤٥ − جتا ٣٠)

الحل (جتا ٤٥ + جا ٦٠)(جا ٤٥ − جتا ٣٠)

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} - \frac{3}{4} = \frac{-1}{4}$$

مثال [١١]

بدون استخدام الحاسبة أوجد قيمة : جا ٤٥ جتا ٤٥ + جا ٣٠ جتا ٦٠ − جتا² ٣٠

الحل جا ٤٥ جتا ٤٥ + جا ٣٠ جتا ٦٠ − جتا² ٣٠

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = \frac{3}{4} - \frac{3}{4} = \text{صفر}$$

مثال [١٢]

بدون استخدام الحاسبة أوجد قيمة :

حا ٣٠ حتا ٦٠ + حتا² ٣٠ + ٥ طا ٤٥° − ١٠ حتا² ٤٥°

حا ٣٠ حتا ٦٠ + حتا² ٣٠ + ٥ طا ٤٥ − ١٠ حتا² ٤٥

$= (\frac{١}{٢})(\frac{١}{٢}) + (\frac{\sqrt{٣}}{٢})^{٢} + ٥(١) - ١٠(\frac{١}{\sqrt{٢}})^{٢} = \frac{١}{٤} + \frac{٣}{٤} + ٥ - \frac{١٠}{٢} = ١ + ٥ - ٥ = ١$

مثال [١٣]

بدون استخدام الحاسبة أوجد قيمة : جا ٣٠ + جتا٦٠ − جا² ٤٥ =

الحل جا ٣٠ + جتا٦٠ − جا² ٤٥ $= \frac{١}{٢} + \frac{١}{٢} - (\frac{١}{\sqrt{٢}})^{٢} = \frac{١}{٢} + \frac{١}{٢} - \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢}$

مثال [١٤]

بدون استخدام الحاسبة أوجد قيمة : جتا² ٣٠ + جا² ٦٠ + جتا² ٤٥

جتا² ٣٠ + جا² ٦٠ + جتا² ٤٥ $= (\frac{\sqrt{٣}}{٢})^{٢} + (\frac{\sqrt{٣}}{٢})^{٢} + (\frac{١}{\sqrt{٢}})^{٢} = \frac{٣}{٤} + \frac{٣}{٤} + \frac{١}{٢} = ١\frac{١}{٢} + \frac{١}{٢} = ٢$

مثال [١٦]

بدون استخدام الحاسبة اثبت أن : طا ٦٠° $= \frac{\text{٢طا ٣٠°}}{\text{١ − طا² ٣٠°}}$

الطرف الايمن = طا ٦٠ = $\sqrt{٣}$

الطرف الأيسر $= \frac{\text{٢طا ٣٠°}}{\text{١ − طا² ٣٠°}} = ٢(\frac{١}{\sqrt{٣}}) \div [\,١ - (\frac{١}{\sqrt{٣}})^{٢}\,] = \frac{٢}{\sqrt{٣}} \div (١ - \frac{١}{٣}) = \frac{٢}{\sqrt{٣}} \div (\frac{٢}{٣})$

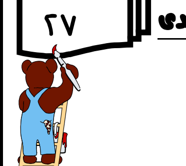
$= \frac{٢}{\sqrt{٣}} \times \frac{٣}{٢} = \frac{٣}{\sqrt{٣}} \times \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}} = \frac{٣\sqrt{٣}}{٣} = \sqrt{٣}$ الطرفان متساويان

مثال [١٧]

بدون استخدام الحاسبة اثبت أن: حا² ٣٠ + حا² ٦٠ + حا² ٤٥ = حتا² ٣٠ + $\frac{١}{٣}$ طا² ٦٠ − حتا² ٦٠

الطرف الأيمن = حا² ٣٠ + حا² ٦٠ + حا² ٤٥ $= (\frac{\sqrt{٣}}{٢})^{٢} + (\frac{١}{٢})^{٢} + (\frac{١}{\sqrt{٢}})^{٢} = \frac{٣}{٤} + \frac{١}{٤} + \frac{١}{٢} = ١ + \frac{١}{٢} = ١\frac{١}{٢}$

الطرف الأيسر = حتا² ٣٠ + $\frac{١}{٣}$ طا² ٦٠ − حتا² ٦٠ $= (\frac{\sqrt{٣}}{٢})^{٢} + (\frac{١}{٣})(\sqrt{٣})^{٢} - (\frac{١}{٢})^{٢} =$



$= \frac{٣}{٤} + (\frac{١}{٣})(٣) - \frac{١}{٤} = \frac{١}{٢} + ١ = ١\frac{١}{٢}$ الطرفان متساويان

✍ **مثال (١٨)**

بدون استخدام الحاسبة اثبت أن : $ظا^٢ ٦٠° - ظا^٢ ٣٠° = \frac{١ + ظا ٦٠° ظا ٣٠°}{حتا^٢ ٣٠°}$

الطرف الأيمن $= ظا^٢ ٦٠ - ظا^٢ ٣٠ = (\sqrt{٣})^٢ - (\frac{١}{\sqrt{٣}})^٢ = ٣ - \frac{١}{٣} = ٢\frac{٢}{٣}$

الطرف الأيسر $= \frac{١ + ظا ٦٠° ظا ٣٠°}{حتا^٢ ٣٠°} = [١ + (\sqrt{٣})(\frac{١}{\sqrt{٣}})] \div (\frac{\sqrt{٣}}{٢})^٢ = (١ + ١) \times (\frac{٤}{٣})$

$= ٢ \times \frac{٤}{٣} = \frac{٨}{٣} = ٢\frac{٢}{٣}$ الطرفان متساويان

إيجاد الزاوية إذا علمت النسب المثلثية لهذه الزاوية بدون استخدام حاسبة الجيب

✍ **مثال (١٩)**

أوجد قيمة س حيث س زاوية حادة إذا كان $ظا س° = ٤ حتا ٦٠° حا ٣٠°$

الحل $ظا س° = ٤ ظا ٦٠° حا ٣٠° = ٤(\frac{١}{٢})(\frac{١}{٢}) = ٤(\frac{١}{٤}) = ١$

$ظا س° = = ١$ $س° = ٤٥°$

✍ **مثال (٢٠)**

أوجد قيمة س إذا كان $٢حا س° = ظا^٢ ٦٠° - ٢ ظا ٤٥°$ **حيث س زاوية حادة**

$٢حا س° = ظا^٢ ٦٠° - ٢ظا ٤٥° = (\sqrt{٣})^٢ - ٢(١)^٢ = ٣ - ٢ = ١$

$٢حا س° = ١$ $حا س° = \frac{١}{٢}$ $س° = ٣٠°$

✍ **مثال (٢١)**

أوجد قيمة س إذا كان $حا س° = حا ٦٠° حتا ٣٠° - حتا ٦٠° حا ٣٠°$ **حيث س زاوية حادة**

$حا س° = حا ٦٠° حتا ٣٠° - حتا ٦٠° حا ٣٠° = (\frac{\sqrt{٣}}{٢})(\frac{\sqrt{٣}}{٢}) - (\frac{١}{٢})(\frac{١}{٢}) = \frac{٣}{٤} - \frac{١}{٤} = \frac{١}{٢}$

$\therefore حا س° = \frac{١}{٢}$ $\therefore س° = ٣٠°$

مثال [٢٢]

أوجد قيمة س إذا كان $٢ \text{ طا } س^\circ = \dfrac{\text{حتا}^٢ ٦٠^\circ + \text{حتا}^٢ ٣٠^\circ + \text{طا}^٢ ٤٥^\circ}{\text{حا } ٦٠^\circ \text{ طا } ٦٠^\circ - \text{حا } ٣٠^\circ}$ **حيث س زاوية حادة**

$$٢ \text{ طا } س^\circ = \dfrac{\text{حتا}^٢ ٦٠^\circ + \text{حتا}^٢ ٣٠^\circ + \text{طا}^٢ ٤٥^\circ}{\text{حا } ٦٠^\circ \text{ طا } ٦٠^\circ - \text{حا } ٣٠^\circ} = \left[\left(\frac{١}{٢}\right)^٢ + \left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)^٢ + (١)^٢\right] \div \left[\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)\left(\sqrt{٣}\right) - \frac{١}{٢}\right]$$

$$= \left[\frac{١}{٤} + \frac{٣}{٤} + ١\right] \div \left[\frac{٣}{٢} - \frac{١}{٢}\right] = ٢ \div ١ = ٢$$

$٢ \text{ طا } س^\circ = ٢$ $٢ \text{ طا } س^\circ = ١$ $س^\circ = ٤٥^\circ$

مثال [٢٣]

△ أ ب جـ قائم فى ب ، ق(∠ أ) = ٢ ق(∠ جـ) ، احسب قيمة المقدار : جتا² أ + ظا² جـ

احسب مساحة △ أ ب جـ

∵ △ أ ب جـ قائم فى ب

∴ ق(∠ أ) + ق(∠ جـ) = ٩٠°

، ∵ ق(∠ أ) = ٢ ق(∠ جـ)

∴ ٢ ق(∠ جـ) + ق(∠ جـ) = ٩٠°   ∴ ٣ ق(∠ جـ) = ٩٠°

∴ ق(∠ جـ) = ٣٠°   ∴ ق(∠ أ) = ٦٠°

$$\therefore \text{جتا}^٢ أ + \text{ظا}^٢ جـ = \text{جتا}^٢ ٦٠^\circ + \text{ظا}^٢ ٣٠^\circ = \left(\frac{١}{٢}\right)^٢ + \left(\frac{١}{\sqrt{٣}}\right)^٢ = \frac{١}{٤} + \frac{١}{٣} = \frac{٣ + ٤}{١٢} = \frac{٧}{١٢}$$

مثال [٢٤]

إذا كانت : س ، ص قياسى زاويتين متتامتين بحيث س : ص = ١ : ٢ **احسب قيمة** جا س + جتا ص

∵ س ، ص قياسى زاويتين متتامتين   ∴ س + ص = ٩٠°   ∴ س = م ، ص = ٢م

∴ س + ص = م + ٢م = ٩٠   ∴ ٣م = ٩٠°   ∴ م = ٣٠°

∴ س = ٣٠°   ، ص = ٦٠°

$$\text{جا } س + \text{جتا } ص = \text{جا } ٣٠ + \text{جتا } ٦٠^\circ = \frac{١}{٢} + \frac{١}{٢} = ١$$

مثال [٢٥]

أوجد قيمة هـ حيث هـ زاوية حادة إذا كان : جتا هـ × ظا هـ = $\frac{١}{٢}$

∵ جتا هـ × ظا هـ = $\frac{١}{٢}$ ∵ ظا هـ = $\frac{\text{جا هـ}}{\text{جتا هـ}}$

∴ جتا هـ × $\frac{\text{جا هـ}}{\text{جتا هـ}}$ = $\frac{١}{٢}$

∴ جا هـ = $\frac{١}{٢}$

∴ هـ = °٣٠

مثال [٢٦]

فى الشكل المقابل :

إذا كان : ق(∠ب) = °١٣٥

، أ ب = ٦ $\sqrt{٢}$ سم

، ب جـ = ٢سم **أوجد** : ظا ∠ جـ

العمل : $\overline{\text{أ هـ}}$ ⊥ $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$

∵ ∠ أ ب هـ تكمل ∠ أ ب جـ

∴ ق(∠ أ ب هـ) = °١٨٠ − °١٣٥ = °٤٥

∴ △ أ هـ ب متساوى الساقين

∵ جا ∠ أ ب هـ = $\frac{\text{أ هـ}}{\text{أ ب}}$

∴ جا °٤٥ = $\frac{\text{أ هـ}}{٦\sqrt{٢}}$ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

∴ أ هـ = ب هـ = ٦ سم

∴ هـ جـ = ٢ + ٦ = ٨ سم

∴ ظا ∠ جـ = $\frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ جـ}}$ = $\frac{٦}{٨}$ = $\frac{٣}{٤}$

تمارين على النسب المثلثية للزوايا الخاصة .

[أ] أكمل ما يأتى :

❶ حتا ٣٠° = ...   ❷ طا ٤٥° = ...

❸ حا ٦٠° = ...   ❹ حا ٣٠° + حتا ٦٠ − طا ٤٥° = ...

❺ حا^٢ ٤٥° + حتا^٢ ٤٥° = ...

❻ إذا كانت : حتا أ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ حيث أ زاوية حادة فان ق (∠ أ) = ...°

❼ إذا كانت : حا ب = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ حيث ب زاوية حادة فان : ق (∠ب) = ...°

❽ إذا كانت جا س = $\frac{1}{2}$ فان : ق (∠س) = ...°

❾ إذا كانت جتا س = $\frac{1}{2}$ فان : ق (∠س) =........°

❿ إذا كانت ظا س = ١ فان : ق (∠س) = ...°

⓫ إذا كانت جا س = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ فان : حتا س = ...°

⓬ إذا كانت جا $\frac{س}{2}$ = $\frac{1}{2}$ فان : ظا س = ...°

⓭ إذا كانت ظا $\frac{س}{3}$ = ١ فان : ق (∠ س) = ...° ، حتا (س − ٦٥) = ...°

⓮ إذا كانت جا (س + ١٥) = $\frac{1}{\sqrt{2}}$ فان : ق (∠س) = ...° ، حتا س = ...°

⓯ إذا كانت جتا (س −١٠) = $\frac{1}{2}$ فان : ق (∠ س) = ...° ، ظا (س − ٤٠°) = ...°

⓰ إذا كانت ظا (٢س − ٣٠) = $\sqrt{3}$ فان : ق (∠س) = ...°

⓱ إذا كانت ظا ٣س = $\sqrt{3}$ فان : ق (∠ س) = ...°

⓲ إذا كانت ظا (س + ١٠) = $\sqrt{3}$ فان : ق (∠ س) = ...°

⓳ إذا كانت جتا $\frac{2س}{3}$ = $\frac{1}{2}$ فان : ق (∠ س) =........°

⓴ إذا كانت حا س = حتا ص فان : ق (∠ س) + ق (∠ص) = ...°

㉑ إذا كانت ٢ حتا س = $\sqrt{3}$ فان : ق (∠س) = ...°



㉒ إذا كانت △ أ ب جـ فيه ق(∠ب) = ق(∠أ) + ق(∠جـ) فإن : حتا (ب/٢) = ...°

㉓ إذا كانت طا س = ٢ حا ٤٥° حتا ٤٥° فإن س = ...°

㉔ إذا كانت طا ٢س = √٣ / ٣ فإن س = ...° ، حيث (٢س) زاوية حادة

㉕ إذا كانت طا (س/٢) = ١/√٣ فإن س = ...°

[٢] بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة

❶ حتا ٦٠° + حا ٣٠° − حتا² ٤٥°

❷ حا ٦٠° + حتا ٣٠° − طا ٦٠°

❸ حا ٤٥° حتا ٤٥° + حا ٣٠° حتا ٦٠° − حتا² ٣٠°

❹ حا ٣٠° حتا ٤٥° − حتا ٦٠° حا ٤٥°

❺ ٢ حا ٣٠° حتا ٦٠° + √٢ حا ٤٥°

❻ (٤ حا² ٣٠° − ٣ طا ٤٥°) / (٢ حتا ٦٠° + ٢ حا ٤٥° حتا ٤٥°)

[٣] اثبت صحة المتطابقات التالية بدون استخدام حاسبة الجيب :

❶ جا ٦٠° = ٢ جا ٣٠ جتا ٣٠°

❷ جا² ٣٠° = ٥ جتا² ٦٠° − ظا² ٤٥°

❸ جتا ٦٠ = ٢ جتا² ٣٠° − ١

❹ حتا ٦٠° = حتا² ٣٠° − حا² ٣٠°

❺ ظا ٦٠° = ٢ ظا ٣٠° / (١ − ظا² ٣٠°)

❻ ظا² ٦٠° − ظا² ٣٠° = (١ + ظا ٦٠° ظا ٣٠°) / جتا² ٣٠°

❼ ٢ جتا² ٤٥° − ١ = ١ − ٢ جا² ٤٥°

❽ ظا² ٦٠° − ظا² ٤٥° = جا² ٦٠° + جتا² ٦٠° + ٢ جا ٣٠°

[٤] بدون استخدام الحاسبة اثبت أن :

❶ ٢ حا ٤٥° حتا ٤٥° طا ٤٥° = ١

❷ طا ٤٥° + حا ٣٠° + حتا ٦٠° = ٢

❸ حتا² ٣٠° طا² ٣٠° طا ٤٥° = ١/٤

❹ ٣ طا² ٤٥° − ٢ حا ٦٠° حتا ٣٠° = ٣/٢

❺ حا (٦٠° − ٣٠°) − حتا ٦٠° + حتا² ٤٥° = ١/٢

❻ (طا ٤٥ − حا ٦٠)(طا ٤٥° + حتا ٦٠°) = ١/٤

❼ ٣ طا² ٣٠° + (٤/٣) حتا² ٣٠° − طا² ٤٥° = ١

❽ ٢ حتا² ٦٠ + ٣ حا² ٤٥ + ٤ طا² ٦٠ − ٤ طا ٤٥ = ١٠

❾ (حا ٣٠ حتا ٤٥ + حا ٤٥ حتا ٣٠) / (حا ٤٥ حتا ٦٠ + حتا ٤٥ حا ٦٠) = ١

[٥] بدون استخدام الحاسبة أوجد قيمة س (حيث س زاوية حادة) التي تحقق



❶ ظا س = ٤ جتا ٦٠ جا ٣٠

❷ ٢ جا س = جا ٣٠ جتا ٦٠ + جتا ٣٠ جا ٦٠

❸ س جا² ٤٥ = ظا² ٦٠

❹ ٤س = جتا² ٣٠ ظا² ٣٠ ظا² ٤٥

❺ س جا ٤٥ جتا ٤٥ ظا ٦٠ = ظا² ٤٥ − جتا² ٦٠

[٦] احسب قيمة (س) حيث س زاوية حادة اذا كانت

❶ جا س = جا ٦٠ جتا ٣٠ − جتا ٦٠ جا ٣٠

❷ ظا (س + ١٠) = $\sqrt{3}$ حيث س + ١٠ زاوية حادة

❸ جا ٢س = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ حيث (٢س) زاوية حادة

❹ جتا س = $\frac{\text{جا ٦٠ جا ٣٠}}{\text{ظا ٤٥ جا² ٤٥}}$ حيث س زاوية حادة

❺ جتا $\frac{\text{س}}{2}$ = $\frac{1}{2}$ حيث $\frac{\text{س}}{2}$ زاوية حادة .

[٧] أوجد قيمة : ٢ جا أ + جتا ٢أ + $\frac{1}{2}$ ظا (أ + ١٥) عندما أ = ٣٠°

[٨] باستخدام حاسبة الجيب أوجد كل مما يأتي مقربا الناتج لأقرب ٤ أرقام عشرية

❶ جا ٥٦°　❷ جتا ٤٠َ ١٢°　❸ ظا ١٥″ ٣٤َ ٦٧°　❹ جتا ٣٣َ ٨٧°

[٩] باستخدام الآلة الحاسبة أوجد هـ حيث هـ زاوية حادة

❶ جا هـ = ٠,١٢٣٣　❷ ظا هـ = ٠,٩٥٠١٧　❸ جتا هـ = ٠,٣٢٧　❹ جتا هـ = ٠,٢٥٨٩٦

[١٠] أ ب جـ ء مربع ، هـ جـ و ع مربع

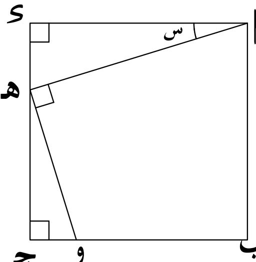
، أ ب = ١٢سم ، جـ و = ٤سم

أوجد : ظا (∠ أ ع هـ)

[١١] أ ب جـ ء مربع ، هـ ∈ $\overline{\text{ء جـ}}$ ، و ∈ $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{أ هـ}}$ ⊥ هـ و

، ء هـ = ٣سم ، و جـ = ٢سم ،

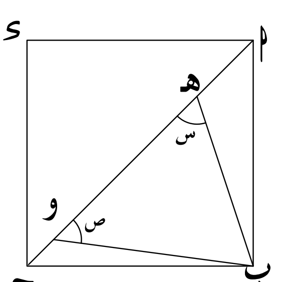
أوجد : ظا س

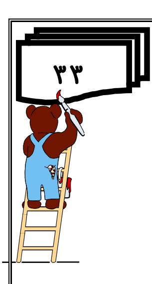


[١٢] أ ب جـ ء مربع فيه : هـ ∈ $\overline{\text{أ جـ}}$ ، و ∈ $\overline{\text{أ جـ}}$

بحيث : أ هـ = ٢سم ، هـ و = ٥سم ، و جـ = ١سم

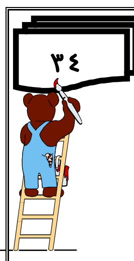
أوجد قيمة : ظا س + ظا ص





الدرس الثانى

البعد بين نقطتين



البعد بين نقطتين

بفرض أ(س١ ، ص١) ، ب(س٢ ، ص٢) نقطتين فى مستوى فإن :

أب = $\sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$

أى أن : البعد بين نقطتين = $\sqrt{\text{مربع فرق السينات + مربع فرق الصادات}}$

حالة خاصة ١

عندما يكون مطلوب إيجاد بعد نقطة فى مستوى احداثى متعامد عن نقطة الأصل

أى حساب طول واصل بين النقطة (٠ ، ٠) و النقطة (أ ، ب) فإنها تساوى $\sqrt{أ^٢ + ب^٢}$

حالة خاصة ٢

لايجاد بعد نقطة (س ، ص) عن محور السينات نوجد | ص | وحدة طول

مثال [١]

بعد النقطة (-٣ ، -٦) عن محور السينات = | -٦ | = ٦ وحدة طول

حالة خاصة ٣

لايجاد بعد نقطة (س ، ص) عن محور الصادات نوجد | س | وحدة طول

مثال [٢]

بعد النقطة (-٥ ، ٤) عن محور الصادات = | -٥ | = ٥ وحدة طول

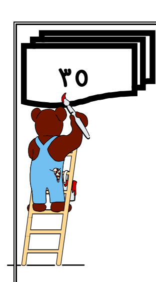
نتيجة هامة :

لإثبات أن أى ثلاث نقاط على استقامة واحدة نوجد البعد بين كل نقطتين ثم نثبت أن أكبر بعد يساوى مجموع البعدين الآخرين

ملاحظة ١ :

لإثبات أن النقاط س ، ص ، ع هى رءوس مثلث نوجد س ص ، ص ع ، س ع

ثم نثبت أن مجموع طولى أى ضلعين اكبر من طول الضلع الثالث .



ملاحظة ٢ :

لتعيين نوع المثلث س ص ع حسب زواياه و ليكن س ع أكبر ضلع :

١- إذا كان (س ع)^{2} > (س ص)^{2} + (ص ع)^{2}

كان المثلث منفرج فى ∠ ص

٢- إذا كان (س ع)^{2} < (س ص)^{2} + (ص ع)^{2}

كان المثلث حاد الزوايا

٣- إذا كان (س ع)^{2} = (س ص)^{2} + (ص ع)^{2}

كان المثلث قائم فى ∠ ص

ملاحظات ؟

(١) أ ، ب ، جـ **على استقامة واحدة تعنى أن مجموع أصغر بعدين منهما يساوي البعد الأكبر**

(٢) أ ب جـ **مثلث متساوي الأضلاع فان** أ ب = أ جـ = ب جـ

(٣) أ ب جـ **مثلث متساوي الساقين فان** أ ب = أ جـ أو أ جـ = ب جـ

(٤) **لإثبات أن الشكل أ ب جـ ء متوازي الأضلاع (نوجد ٤ أطوال) أى نثبت أن**

أ ب = جـ ء ، ب جـ = أ ء

(٥) **لإثبات أن الشكل أ ب جـ ء معين نوجد (٦ أطوال) أى نثبت أن :**

أ ب = ب جـ = جـ ء = ء أ **ثم (القطران غير متساويان) أى أن** القطر أ جـ ≠ القطر ب ء

(٦) **لإثبات أن الشكل أ ب جـ د مستطيل نوجد (٦ أطوال) أى نثبت أن :**

أ ب = جـ ء ب جـ = ء أ **ثم (القطران متساويان) أى أن** القطر أ جـ = القطر ب ء

(٧) **لإثبات أن الشكل أ ب جـ ء مربع نثبت أن :**

أ ب = ب جـ = جـ ء = ء أ **ثم (القطران متساويان) أى أن** القطر أ جـ = القطر ب ء

(٨) **لاثبات أن النقط أ ، ب ، جـ ، ء تنتمي للدائرة م فان :**

م أ = م ب = م جـ = م ء = نق

مثال [٣]

أوجد البعد بين النقطة أ (٣ ، −٤) ونقطة الأصل

أ و = $\sqrt{س^٢ + ص^٢}$ = $\sqrt{(٣)^٢ + (−٤)^٢}$ = $\sqrt{٩ + ١٦}$ = $\sqrt{٢٥}$ = ٥ وحدة طول

مثال [٤]

أوجد مساحة الدائرة التى مركزها نقطة الأصل وتمر بالنقطة (−٦ ، −٨)

نق = $\sqrt{س^٢ + ص^٢}$ =

نق = $\sqrt{(−٦)^٢ + (−٨)^٢}$ = $\sqrt{٣٦ + ٦٤}$ = $\sqrt{١٠٠}$ = ١٠ وحدة طول

مساحة الدائرة = π نق^٢ = π (١٠)^٢ = ١٠٠ π وحدة مربعة

مثال [٥]

إذا كان البعد بين النقطة (س ، −٥) عن نقطة الأصل ١٣ وحدة طول أوجد قيمة س .

أ و = $\sqrt{س^٢ + ص^٢}$ = ١٣

أ و = $\sqrt{(س)^٢ + (−٥)^٢}$ = $\sqrt{س^٢ + ٢٥}$ = ١٣ بتربيع الطرفين

س^٢ + ٢٥ = ١٦٩　　س^٢ = ١٦٩ − ٢٥

س^٢ = ١٤٤　　س = ± ١٢

مثال [٦]

اذا كان البعد بين النقطة (س ، − س) عن نقطة الأصل ٣ $\sqrt{٢}$ وحدة طول أوجد قيمة س .

أ و = $\sqrt{س^٢ + ص^٢}$ = ٣ $\sqrt{٢}$

أ و = $\sqrt{(س)^٢ + (−س)^٢}$ = $\sqrt{س^٢ + س^٢}$ = ٣ $\sqrt{٢}$ بتربيع الطرفين

س^٢ + س^٢ = ٩ × ٢　　٢س^٢ = ١٨

س^٢ = ٩　　س = ±٣

مثال [٧]

إذا كان أ (٢ ، ٣) ، ب (−٥ ، ١) أوجد طول $\overline{أب}$ ؟

أ ب = $\sqrt{(س_٢ − س_١)^٢ + (ص_٢ − ص_١)^٢}$

أ ب = $\sqrt{(−٥ − ٢)^٢ + (١ − ٣)^٢}$ = $\sqrt{(−٧)^٢ + (−٢)^٢}$ = $\sqrt{٤٩ + ٤}$ = $\sqrt{٥٣}$



✍ مثال [٩]

اوجد البعد بين النقطتين ا (٣ ، ٢) ، ب (٧ ، - ١)

ا ب = $\sqrt{(س_{١} - س_{٢})^{٢} + (ص_{١} - ص_{٢})^{٢}}$

= $\sqrt{(٣ - ٧)^{٢} + (٢ + ١)^{٢}}$ = $\sqrt{(-٤)^{٢} + (٣)^{٢}}$

= $\sqrt{١٦ + ٩}$ = $\sqrt{٢٥}$ = ٥ وحدة طول

✍ مثال [١٠]

أوجد البعد بين النقطتين ا (ك ، ٠) ، ب (٠ ، م)

ا ب = $\sqrt{(س_{٢} - س_{١})^{٢} + (ص_{٢} - ص_{١})^{٢}}$ = $\sqrt{(ك - ٠)^{٢} + (٠ - م)^{٢}}$

= $\sqrt{ك^{٢} + م^{٢}}$ وحدة طول

✍ مثال [١٣]

اثبت ان النقطة (٣ ، ٤) هى مركز الدائرة المارة برؤوس المثلث ا ب جـ حيث ا (٣ ، −١) ، ب (٦ ، ٨) ، جـ (−١ ، ١) وأوجد مساحتها ومحيطها

$(م ا)^{٢}$ = $(٣ - ٣)^{٢} + (٤ + ١)^{٢}$ = ٠ + $(٥)^{٢}$ = ٢٥

$(م ب)^{٢}$ = $(٣ - ٦)^{٢} + (٤ - ٨)^{٢}$ = $(-٣)^{٢} + (-٤)^{٢}$ = ٩ + ١٦ = ٢٥

$(م جـ)^{٢}$ = $(٣ + ١)^{٢} + (٤ - ١)^{٢}$ = $(٤)^{٢} + (٣)^{٢}$ = ١٦ + ٩ = ٢٥

م ا = م ب = م جـ = ٥ وحدة طول　　∴ م هى مركز الدائرة المارة بالنقط ا ، ب ، جـ

∴ محيط الدائرة = ٢π نق = ١٠π سم

✍ مثال [١٤]

اثبت أن النقط ا = (٣ ، ٢) ، ب = (١ ، − ٤) ، جـ = (−١ ، ٠) تنتمي لدائرة واحدة مركزها م = (٢ ، − ١) و أوجد مساحتها ؟

م ا = $\sqrt{(٣ - ٢)^{٢} + (٢ + ١)^{٢}}$ = $\sqrt{١ + ٩}$ = $\sqrt{١٠}$

م ب = $\sqrt{(١ - ٢)^{٢} + (- ٤ + ١)^{٢}}$ = $\sqrt{١ + ٩}$ = $\sqrt{١٠}$

م جـ = $\sqrt{(- ١ - ٢)^{٢} + (٠ + ١)^{٢}}$ = $\sqrt{٩ + ١}$ = $\sqrt{١٠}$

∴ م ا = م ب = م جـ = $\sqrt{١٠}$　　∴ النقط ا ، ب ، جـ تنتمي لدائرة واحدة

∴ مساحة الدائرة = ط $نق^{٢}$ = ٣,١٤ × ١٠ = ٣١,٤ $سم^{٢}$



مثال [١٥]

إذا كان بعد النقطة أ (٤،١) عن النقطة ب (١،ص) يساوى ٥ وحدات فاوجد قيمة ص ؟

$\therefore \text{أ ب} = \sqrt{(١ - ٤)^{٢} + (\text{ص} - ١)^{٢}}$

$\therefore \text{أ ب} = \sqrt{٩ + \text{ص}^{٢} - ٢\text{ص} + ١} = ٥$

$\therefore \text{ص}^{٢} - ٢\text{ص} + ١٠ = ٥$ بالتربيع الطرفين $\therefore \text{ص}^{٢} - ٢\text{ص} + ١٠ = ٢٥$

$\therefore \text{ص}^{٢} - ٢\text{ص} - ١٥ = ٠$ $\therefore (\text{ص} - ٥)(\text{ص} + ٣) = ٠$

$\therefore \text{ص} = ٥$ ، $\therefore \text{ص} = -٣$

مثال [١٦]

إذا كانت النقطة (س ، ١) على بعدين متساويين من النقطتين أ (٤ ، ٢) ، ب (٣ ، ٣) احسب قيمة س

الحل نفرض ان النقطة جـ (س ، ١)

$\therefore \text{جـ أ} = \text{جـ ب} = \sqrt{(\text{س}_{٢} - \text{س}_{١})^{٢} + (\text{ص}_{٢} - \text{ص}_{١})^{٢}}$

$\therefore \sqrt{(\text{س} - ٤)^{٢} + (١ - ٢)^{٢}} = \sqrt{(\text{س} - ٣)^{٢} + (١ - ٣)^{٢}}$ بتربيع الطرفين

$\therefore (\text{س} - ٤)^{٢} + (-١)^{٢} = (\text{س} - ٣)^{٢} + (-٢)^{٢}$ $\therefore (\text{س} - ٤)^{٢} + ١ = (\text{س} - ٣)^{٢} + ٤$

$\therefore \text{س}^{٢} - ٨\text{س} + ١٦ + ١ = \text{س}^{٢} - ٦\text{س} + ٩ + ٤$

$\therefore -٨\text{س} + ١٧ = -٦\text{س} + ١٣$

$\therefore -٨\text{س} + ٦\text{س} = ١٣ - ١٧$ $\therefore -٢\text{س} = -٤$ $\therefore \text{س} = ٢$

مثال [١٧]

قطعة مستقيمة طولها ١٠ وحدة طول تصل بين نقطتين احدهما النقطة (٢ ، −٣) والاحداثى السينى للنقطة الثانية ١٠ أوجد احداثيها الصادى

طول القطعة المستقيمة $= \sqrt{(\text{س}_{٢} - \text{س}_{١})^{٢} + (\text{ص}_{٢} - \text{ص}_{١})^{٢}}$

$\therefore \sqrt{(٢ - ١٠)^{٢} + (-٣ - \text{ص})^{٢}} = ١٠$ بتربيع الطرفين

$\therefore (-٨)^{٢} + (-٣ - \text{ص})^{٢} = ١٠٠$ $\therefore ٦٤ + ٩ + ٦\text{ص} + \text{ص}^{٢} = ١٠٠$

$\therefore \text{ص}^{٢} + ٦\text{ص} + ٧٣ - ١٠٠ = ٠$ $\therefore \text{ص}^{٢} + ٦\text{ص} - ٢٧ = ٠$

$\therefore (\text{ص} + ٩)(\text{ص} - ٣) = ٠$ $\therefore \text{ص} = -٩$ ، $\text{ص} = ٣$

✍ مثال [١٨]

اثبت أن النقط أ = (١ ، ٣) ، ب = (٥ ، - ١) ، جـ = (٣ ، ١) على استقامة واحدة ؟

أ ب = √((-١ - ٣)² + (٥ - ١)²) = √((-٤)² + (٤)²) = √٣٢ = ٤√٢ وحدة طول

ب جـ = √((٣ - ٥)² + (١ - (-١))²) = √((-٢)² + (٢)²) = √٨ = ٢√٢ وحدة طول

أ جـ = √((٣ - ١)² + (١ - ٣)²) = √((٢)² + (-٢)²) = √٨ = ٢√٢ وحدة طول

∴ أ ب = ب جـ + أ جـ ∴ أ ، ب ، جـ على استقامة واحدة #

✍ مثال [١٩]

اثبت أن النقط أ = (٣ ، ٢) ، ب = (١ ، - ٤) ، جـ = (-١ ، ٠) هي رؤوس مثلث متساوي الساقين ؟ أوجد مساحته ؟

أ ب = √((٣ - ١)² + (٢ - (-١))²) = √٤٠ = ٢√١٠

أ جـ = √((٣ + ١)² + (٢ - ٠)²) = √٢٠ = ٢√٥

ب جـ = √((١ + ١)² + (-٤ - ٠)²) = √٢٠ = ٢√٥ ∴ أ جـ = ب جـ ∴ المثلث متساوي الساقين

∴ (أ ب)² = (أ جـ)² + (ب جـ)² ∴ المثلث قائم #

مساحة المثلث أ ب جـ = ½ × أ جـ × ب جـ = ½ × ٢√٥ × ٢√٥ = ١٠ وحدة مربعة

✍ مثال [٢٠]

اثبت أ ن النقط أ(١ ، ٤) ، ب(٤ ، ٩) ، جـ(- ١ ، ١٢) ، د(- ٤ ، ٧) هي رؤوس مربع ؟

أ ب = √((١ - ٤)² + (٤ - ٩)²) = √((-٣)² + (-٥)²) = √(٩ + ٢٥) = √٣٤

ب جـ = √((٤ + ١)² + (٩ - ١٢)²) = √((٥)² + (-٣)²) = √(٢٥ + ٩) = √٣٤

جـ د = √((-١ + ٤)² + (١٢ - ٧)²) = √((٣)² + (٥)²) = √(٩ + ٢٥) = √٣٤

د أ = √((-٤ - ١)² + (٧ - ٤)²) = √((-٥)² + (٣)²) = √(٢٥ + ٩) = √٣٤

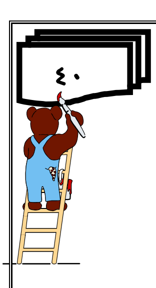
أ ب = ب جـ = جـ د = د أ ⟵ (١)

أ جـ = √((١ + ١)² + (٤ - ١٢)²) = √((٢)² + (- ٨)²) = √(٤ + ٦٤) = √٦٨

ب د = √((٤ + ٤)² + (٩ - ٧)²) = √((٨)² + (-٢)²) = √(٦٤ + ٤) = √٦٨

أ جـ = ب د ⟵ (٢)

من (١) ، (٢) نجد أن الشكل أ ب جـ د مربع



تمارين على البعد بين نقطتين

[١] أكمل ما يأتى :

(١) إذا كانت أ (٣ ، ٣) ب (٢ ، ٢) فان طول $\overline{أب}$ = ...سم

(٢) بعد النقطة (٠ ، –٣) عن محور الصادات = ... وحدة طول

(٣) بعد النقطة (٩ ، –٨) عن محور السينات = ... وحدة طول

(٤) بعد النقطة (–٤ ، –٣) عن نقطة الأصل = ... وحدة طول

(٥) إذا كانت (–٥ ، ١٢) ، و نقطة الأصل حيث و منتصف $\overline{أب}$ فان أب = ... وحدة طول

(٦) البعد بين النقطتين (٣ ، ٠) ، (٠ ، ٥) = ...وحدة طول

(٧) البعد بين النقطتين (– ١ ، ٤) ، (– ٤ ، ١) = ...وحدة طول

(٨) البعد بين النقطتين س (–٨ ، ٦) ، نقطة الأصل يساوى ....وحدة طول

(٩) طول نصف قطر دائرة مركزها م (٧ ، ٤) وتمر بالنقطة (٣ ، ١) يساوى ....وحدة طول

(١٠) البعد بين النقطتين (أ ، ٠) ، ب (٠ ، ١) يساوى وحدة طول واحدة فان أ = ...

(١١) فى المربع أ ب جـ ء اذا كان أ (٣ ، ٥) ، ب (٤ ، ٢) فان مساحة المربع = ...وحدة مساحة

(١٢) فى المعين أ ب جـ ء حيث أ (–١ ، ٧) ، ب (–٣ ، ١) فان محيط المعين = ...وحدة طول .

[٢] اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان أ ($س_١$ ، $ص_١$) ، ب ($س_٢$ ، $ص_٢$) نقطتين فى مستوى فإن : أب = ...

(أ) $\sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$　　(ب) $س_١ص_١ + س_٢ص_٢$

(جـ) ($س_١ - س_٢$ ، $ص_١ - ص_٢$)　　(د) $\sqrt{س_١س_٢ + ص_١ص_٢}$

(٢) البعد بين النقطتين (٢ ، ٢) ، (–١ ، ٦) يساوى .... وحدة طول .

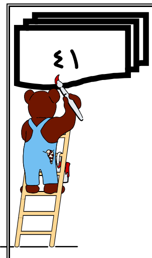
(أ) ٢　　(ب) ٥　　(جـ) ١٠　　(د) ٢٥

(٣) إذا كانت أ (٤ ، - ١) فان بعد النقطة أ عن نقطة الأصل = ... وحدة طول .

(أ) $\sqrt{٣}$　　(ب) $\sqrt{١٧}$　　(جـ) $\sqrt{١٥}$　　(د) ٣

(٤) فى مستوى احداثى متعامد النقطة التى تبعد عن نقطة الأصل مسافة ٢ وحدة طول يمكن أن تكون ....

(أ) (١ ، ٢)　　(ب) (٢ ، ١)　　(جـ) (٠ ، ٢)　　(د) (–٣ ، ٥)



(٥) بعد النقطة (٢ ، −٣) عن محور السينات = ... وحدة طول .

(م) ٢		(ب) −٣		(ج) $\sqrt{١٣}$		(د) ٣

(٦) بعد النقطة (٢ ، - ٣) عن محور الصادات = ... وحدة طول .

(م) ٢		(ب) −٣		(ج) $\sqrt{١٣}$		(د) $\sqrt{٥}$

(٧) دائرة مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها ٢ وحدة طول فأي النقط الآتية تنتمي للدائرة

(م) (١ ، ٢)		(ب) (−٢ ، ١)		(ج) ($\sqrt{٣}$ ، ١)		(د) ($\sqrt{٢}$ ، ١)

(٨) النقط (٠ ، ٠) ، (٦ ، ٠) ، (٠ ، ٨) ....

(م) تكون △ منفرج الزاوية		(ب) تكون △ حاد الزوايا

(ج) تكون △ قائم الزاوية		(د) تقع على استقامة واحدة

[٧] اثبت ان النقط التالية تمثل رؤوس مثلث وبين نوعه بالنسبة لقياسات زواياه

(أ) م (−٥ ، −٤) ، ب (٣ ، ٢) ، جـ (٧ ، −١)

(ب) س (٢ ، ١) ، ص (٦ ، −٢) ، ع (٣ ، ٢)

(ج) م (٣ ، ٢) ، ن (١ ، ٤) ، ل (٢ ، ٥)

[٨] اثبت ان النقط م ، ب ، جـ على استقامة واحدة

(أ) م (٠ ، ٠) ، ب (٣ ، ٠) ، جـ (−٤ ، ٠)

(ب) م (٣ ، ٢) ، ب (٤ ، ٥) ، جـ (٢ ، −١)

(ج) م (٤ ، −٥) ، ب (١ ، −١) ، جـ (−٢ ، ٣)

[٩] اثبت ان △ م ب جـ متساوي الساقين في كلا من الحالات التالية

(أ) م (٧ ، −١) ، ب (٢ ، −٢) ، جـ (٣ ، ٣)

(ب) م (١ ، ٠) ، ب (٤ ، ١) ، جـ (٢ ، −٣)

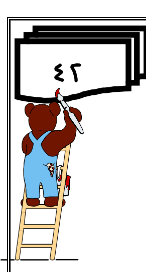
(ج) م (١ ، −٢) ، ب (−٤ ، ٣) ، جـ (١ ، ٦)

[١٢] اثبت ان △ م ب جـ قائم الزاوية ثم اوجد مساحته

(أ) م (٣ ، ٥) ، ب (٣ ، −١) ، جـ (−٧ ، −١)

(ب) م (٥ ، ٦) ، ب (٨ ، ٥) ، جـ (٢ ، −٣)

(ج) م (٢ ، −٢) ، ب (٠ ، −٥) ، جـ (−٣ ، −٣)



[١٣] اثبت أن △ أ ب جـ حاد الزوايا

(أ) أ(٣ ، ٢)، ب(١ ، −٢) ، جـ(−٢ ، ٢)

(ب) أ(٢ ، −١) ، ب(٠ ، −٢) ، جـ(−١ ، ١)

[١٤] اثبت أن △ أ ب جـ منفرج الزاوية

(أ) أ(٣ ، ٢)، ب(٢ ، ٠) ، جـ(−٢ ، −١)

(ب) أ(٤ ، −١) ، ب(٢ ، −٣) ، جـ(−٢ ، −٤)

[١٥] اثبت أن أ ب جـ ء متوازي أضلاع

(أ) أ(−٤ ، −٢) ، ب(٢ ، ٠) ، جـ(٨ ، ٦) ، ء(٢ ، ٤)

(ب) أ(١ ، ٢)، ب(٢ ، ٥)، جـ(٦ ، ٦) ، ء(٥ ، ٣)

(ج) أ(٠ ، −١) ، ب(−٣ ، ٢) ، جـ(−٤ ، ٠) ، ء(− ١ ، − ٣)

[١٦] اثبت أن أ ب جـ ء مربع

(أ) أ(١ ، ٤) ، ب(٤ ، ٩) ، جـ(−١ ، ١٢) ، ء(−٤ ، ٧) ثم أوجد مساحته

(ب) أ(١ ، ٤) ، ب(٤ ، ٩) ، جـ(−١ ، ١٢) ، ء(−٤ ، ٧) ثم أوجد مساحته

[١٧] اثبت أن أ ب جـ ء مستطيل

(أ) أ(٢ ، −٥) ، ب(−١ ، −٨) ، جـ(−٦ ، −٣) ، ء(−٣ ، ٠) ثم أوجد محيطه

(ب) أ(٣ ، ٢) ، ب(−٢ ، ٢) ، جـ(−٢ ، −١) ، ء(٣ ، −١) ثم أوجد مساحته

[١٨] اثبت أن أ ب جـ ء معين و أوجد مساحته

(أ) أ(٤ ، ٠) ، ب(٢ ، ٣) ، جـ(٠ ، ٠) ، ء(٢ ، −٣)

(ب) أ(١ ، ١) ، ب(٥ ، ٣) ، جـ(٧ ، ٧) ، ء(٣ ، ٥)

[١٩] اثبت أن أ ب جـ ء شبه منحرف :

أ(٣ ، ٣)، ب(−٢ ، ٢) ، جـ(٠ ، ٦) ، ء(٤ ، ٥)

(٢٠) إذا كانت أ(٣ ، ٢) ، ب(٠ ، ٥) ، جـ((−٣ ، ٢) اثبت أن أ ، ب ، جـ تقع على دائرة واحدة مركزها م

حيث م(٠ ، ٢) أوجد طول نصف قطرها

(٢١) أوجد بدلالة π محيط ومساحة الدائرة التى مركزها نقطة الأصل وتمر بالنقطة أ (٥ ، ١٢)

(٢٢) اثبت أن النقطة م(–٤ ، ٦) هى مركز الدائرة المارة بالنقط أ(–٦ ، ٢) ، ب(٠ ، ٨) ، جـ (–٨ ، ٤) وأوجد طول قطرها

(٢٣) إذا كانت أ (س ، –٢) ، ب(٧ ، ١) وكان أ ب = ٥ وحدة طول فأوجد قيمة س

(٢٤) إذا كان بعد النقطة (س ، ٥) عن النقطة (٦ ، ١) يساوى ٢ $\sqrt{٥}$ فاحسب قيمة س

(٢٥) أوجد قيمة أ إذا كان البعد بين النقطتين (أ ، ٧) ، (–٢ ، ٣) يساوى ٥

(٢٦) أوجد قيمة أ إذا كان البعد بين النقطتين (أ ، ٧) ، (٣أ–١ ، –٥) يساوى ١٣

(٢٧) احسب قيمة س إذا كانت أ (س ، ٣) ، ب(٣ ، ٢) ، جـ(٥ ، ١) وكانت أ ب = ب جـ

(٢٨) إذا كانت النقطة س(م ، ٠) ، على بعدين متساويين من النقطتين أ(٣ ، ٢) ، ب(–٣ ، –٢) احسب قيمة م

(٢٩) إذا كانت أ(١ ، ص) ∋ محور تماثل ب جـ حيث ب(٠ ، ٦) ، جـ (–٦ ، ٠) فأوجد قيمة ص .

ومن ثم اثبت أن △ أ ب جـ حاد الزوايا

(٣٠) إذا كان أ (١ ، ١) ، ب(٤ ، ص) وكان أ ب = ٥ وحدة طول . أوجد قيم ص الممكنة

(٣١) أوجد قيمة ص التي تجعل △ أ ب جـ قائم الزاوية في ب : أ(١ ، ص) ، ب(٥ ، ١٠) ، جـ (٨ ، ٦) .

ثم اثبت أن ق(جـ) = ٩٠°

(٣٢) إذا كان البعد بين النقطتين أ (–١١ ، ص) ، ب(٢ ، –١) هو ١٧ أوجد قيمة ص

(٣٣) إذا كان أ(٣ ، ٢) ، ب(س ، ١٠) وكان أ ب = ١٠ وحدة طول احسب قيمة س

(٣٤) إذا كان البعد النقطة (س ، ٤) عن النقطة (٢ ، –١) يساوى $\sqrt{٢٦}$ احسب قيمة س

(٣٥) إذا كان البعد النقطة (س ، ٢) عن النقطة (٣ ، ٤) يساوى ٨ احسب قيمة س

(٣٦) إذا كان البعد النقطة (٣، ٤) عن النقطة (- ٢ ، ص) يساوى ١٢ احسب قيمة ص

(٣٧) إذا كانت النقطة ء(م ، ١) على بعدين متساويين من النقطتين أ(١ ، ٢) ، ب((٢ ، ٥) احسب قيمة م

(٣٨) إذا كانت النقطة س(١ ، ٠) على بعدين متساويين من النقطتين ص(٢ ، –٣) ، ع (٤ ، م) احسب قيمة م

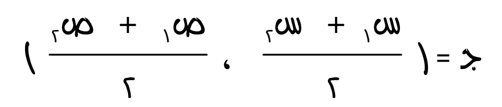


الدرس الثالث

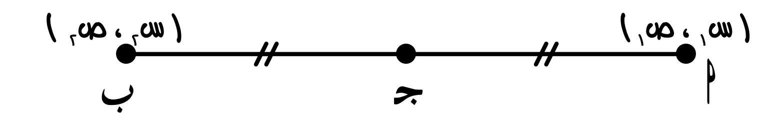
إحداثيا منتصف قطعة مستقيمة

إحداثيا منتصف قطعة مستقيمة

إذا كان أ = (س١ ، ص١) ، ب = (س٢، ص٢) وكانت النقطة جـ منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ فإن إحداثي النقطة



جـ = ($\frac{س_1 + س_2}{2}$ ، $\frac{ص_1 + ص_2}{2}$)



مثال [١]

أوجد احداثى منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ حيث أ = (٤ ، ١) ، ب = (- ٢ ، - ٣)

الحل

ء = ($\frac{س_1 + س_2}{2}$ ، $\frac{ص_1 + ص_2}{2}$) = ($\frac{4 - 2}{2}$ ، $\frac{1 - 3}{2}$) = ($\frac{2}{2}$ ، $\frac{-2}{2}$) = (١ ، −١)

مثال [٢]

إذا كان $\overline{\text{أ ب}}$ قطر فى دائرة مركزها م أوجد احداثى نقطة مركز الدائرة م حيث أ(- ٦ ، - ٢) ، ب(- ٨ ، ٤)

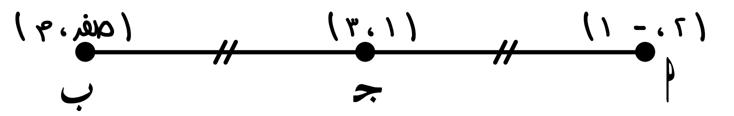
الحل ∵ $\overline{\text{أ ب}}$ قطر ∴ م مركز الدائرة م ∴ م منتصف $\overline{\text{أ ب}}$

∴ احداثى نقطة م = ($\frac{س_1 + س_2}{2}$ ، $\frac{ص_1 + ص_2}{2}$) = ($\frac{-6 - 8}{2}$ ، $\frac{-2 + 4}{2}$) = ($\frac{-14}{2}$ ، $\frac{2}{2}$) = (−٧ ، ١)

مثال [٣]

إذا كانت النقطة جـ منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ حيث جـ = (١ ، ٣) ، أ = (٢ ، −١) ، ب(صفر ، م) احسب قيمة م .

الحل

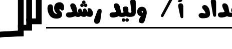


جـ منتصف $\overline{\text{أ ب}}$

جـ = ($\frac{س_1 + س_2}{2}$ ، $\frac{ص_1 + ص_2}{2}$) = ($\frac{2 + صفر}{2}$ ، $\frac{-1 + م}{2}$) = ($\frac{2}{2}$ ، $\frac{-1 + م}{2}$)

= (١ ، $\frac{-1 + م}{2}$) = (١ ، ٣) بمقارنة المسقطين

∴ $\frac{-1 + م}{2}$ = ٣ ∴ −١ + م = ٦ ∴ م = ٦ + ١ = ٧



مثال [٤]

إذا كانت النقطة جـ منتصف $\overline{\text{أب}}$ حيث جـ = (٢ ، −٤) ، أ = (٥ ، ٧) ، ب (س ، ص) احسب قيمة س ، ص .

الحل

ب (س ، ص) —— جـ (٢ ، −٤) —— أ (٥ ، ٧)

∵ جـ منتصف $\overline{\text{أب}}$

$$\text{جـ} = \left(\frac{\text{س}_1 + \text{س}_2}{2} , \frac{\text{ص}_1 + \text{ص}_2}{2} \right) = \left(\frac{5 + \text{س}}{2} , \frac{7 + \text{ص}}{2} \right) = (2 , -4)$$ بمقارنة المسقطين

∴ $\frac{5 + \text{س}}{2} = 2$ ∴ $\frac{7 + \text{ص}}{2} = -4$

∴ ٥ + س = ٤ ∴ ٧ + ص = −٨

∴ س = ٤ − ٥ = −١ ∴ ص = −٨ − ٧ = −١٥

∴ احداثى نقطة ب (−١ ، −١٥)

مثال [٥]

إذا كانت النقطة جـ منتصف $\overline{\text{أب}}$ حيث أ = (١ ، −٢) ، ب = (٣ ، ص) ، جـ = (س ، −٥) احسب قيمة س ، ص .

ب (٣ ، ص) —— جـ (س ، −٥) —— أ (١ ، −٢)

∵ جـ منتصف $\overline{\text{أب}}$

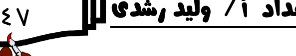
$$\text{جـ} = \left(\frac{\text{س}_1 + \text{س}_2}{2} , \frac{\text{ص}_1 + \text{ص}_2}{2} \right) = \left(\frac{1 + 3}{2} , \frac{-2 + \text{ص}}{2} \right) = \left(\frac{4}{2} , \frac{-2 + \text{ص}}{2} \right)$$

$$= \left(2 , \frac{-2 + \text{ص}}{2} \right) = (\text{س} , -5)$$ بمقارنة المسقطين

∴ س = ٢ ، ∴ $\frac{-2 + \text{ص}}{2} = -5$

∴ −٢ + ص = −١٠ ∴ ص = −١٠ + ٢ = −٨

∴ س = ٢ ، ∴ ص = −٨





مثال [٦]

إذا كانت ٩ = (−١،−١) ، ب = (٢،٣) ، جـ = (٦،٠) ، ء (٣، −٤) فاثبت أن $\overline{\text{٩ جـ}}$ ، $\overline{\text{ب ء}}$ ينصف كلا منهما الأخر ؟ وما اسم هذا الشكل ؟

م منتصف $\overline{\text{٩ جـ}}$

(−١ ، −١) ٩ ——— م ——— جـ (٦ ، ٠)

$$\text{م} = \left(\frac{\text{س}_1 + \text{س}_2}{2} ، \frac{\text{ص}_1 + \text{ص}_2}{2} \right) = \left(\frac{-1 + 6}{2} ، \frac{-1 + 0}{2} \right) = \left(\frac{5}{2} ، \frac{-1}{2} \right)$$

ك منتصف $\overline{\text{ب ء}}$

(٢ ، ٣) ب ——— ك ——— ء (٣ ، −٤)

$$\text{م} = \left(\frac{\text{س}_1 + \text{س}_2}{2} ، \frac{\text{ص}_1 + \text{ص}_2}{2} \right) = \left(\frac{2 + 3}{2} ، \frac{3 - 4}{2} \right) = \left(\frac{5}{2} ، \frac{-1}{2} \right)$$

∵ احداثى م منتصف $\overline{\text{٩ جـ}}$ = احداثى ك منتصف $\overline{\text{ب ء}}$

∴ القطران $\overline{\text{٩ جـ}}$ ، $\overline{\text{ب ء}}$ ينصف كلا منهما الآخر ∴ الشكل ٩ ب جـ ء متوازى أضلاع

مثال [٧]

٩ ب جـ ء متوازي أضلاع فيه ٩ (١ ، ٢) ، ب (−٣ ، ٥) ، جـ (−٢ ، ٧) أوجد إحداثي النقطة ء ؟

نفرض أن م هي نقطة تقاطع القطرين $\overline{\text{٩ جـ}}$ ، $\overline{\text{ب ء}}$

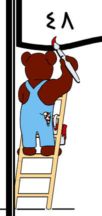
∵ الشكل ٩ ب جـ ء متوازى أضلاع ∴ القطران $\overline{\text{٩ جـ}}$ ، $\overline{\text{ب ء}}$ ينصف كلا منهما الآخر

∵ احداثى منتصف $\overline{\text{٩ جـ}}$ = احداثى منتصف $\overline{\text{ب ء}}$

∴ احداثى منتصف $\overline{\text{ب ء}}$ = م $= \left(\frac{\text{س}_1 + \text{س}_2}{2} ، \frac{\text{ص}_1 + \text{ص}_2}{2} \right) = \left(\frac{\text{س} - 3}{2} ، \frac{\text{س} + 5}{2} \right)$

∴ احداثى منتصف $\overline{\text{٩ جـ}}$ = م $= \left(\frac{\text{س}_1 + \text{س}_2}{2} ، \frac{\text{ص}_1 + \text{ص}_2}{2} \right) = \left(\frac{1 - 2}{2} ، \frac{2 + 7}{2} \right) = \left(\frac{-1}{2} ، \frac{9}{2} \right)$

∴ احداثى منتصف $\overline{\text{٩ جـ}}$ = احداثى منتصف $\overline{\text{ب ء}}$



∴ $\left(\frac{س - ٣}{٢} ، \frac{ص + ٥}{٢} \right) = \left(\frac{-١}{٢} ، \frac{٩}{٢} \right)$ بمقارنة المسقطين

∴ $\frac{س - ٣}{٢} = \frac{-١}{٢}$　　∴ $\frac{ص + ٥}{٢} = \frac{٩}{٢}$

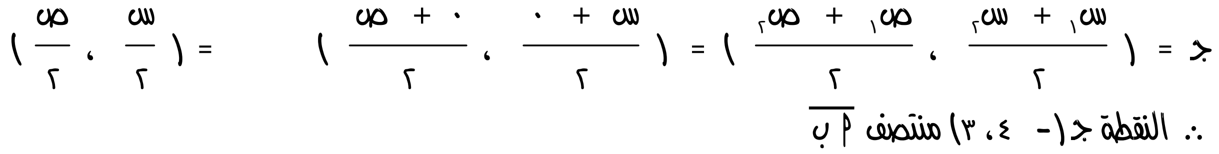
∴ ٢ س − ٦ = −٢　　∴ ٢ ص + ١٠ = ١٨

∴ ٢ س = ٦ − ٢　　∴ ٢ ص = ١٨ − ١٠

∴ ٢ س = ٤　∴ س = ٢　　∴ ٢ ص = ٨　∴ ص = ٤

∴ إحداثي النقطة ء = (٢ ، ٤)

مثال (٨)

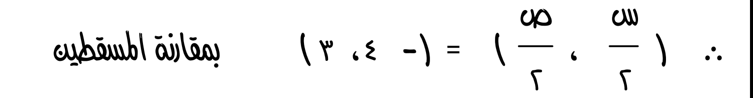


إذا كانت النقطة ٲ تقع على محور السينات ، النقطة ب تقع على محور الصادات وكانت النقطة جـ (− ٤ ، ٣) منتصف $\overline{ٲ ب}$ فاوجد إحداثي كل من ٲ ، ب ؟

الحل ∵ النقطة ٲ تقع على محور السينات　　∴ نفرض أن إحداثي النقطة ٲ هـو (س،٠)

∵ النقطة ب تقع على محور الصادات　　∴ نفرض أن إحداثي النقطة ب هـو (٠،ص)

جـ = $\left(\frac{س_١ + س_٢}{٢} ، \frac{ص_١ + ص_٢}{٢} \right) = \left(\frac{س + ٠}{٢} ، \frac{٠ + ص}{٢} \right) = \left(\frac{س}{٢} ، \frac{ص}{٢} \right)$



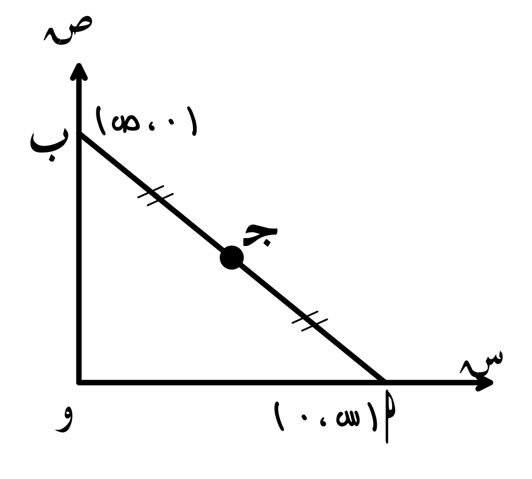
∴ النقطة جـ (− ٤ ، ٣) منتصف $\overline{ٲ ب}$

∴ $\left(\frac{س}{٢} ، \frac{ص}{٢} \right) = (- ٤ ، ٣)$ بمقارنة المسقطين

∴ $\frac{س}{٢} = - ٤$　　∴ س = − ٨

∴ $\frac{ص}{٢} = ٣$　　∴ ص = ٦

ٲ = (− ٨ ، صفر)　،　ب = (صفر ، ٦)



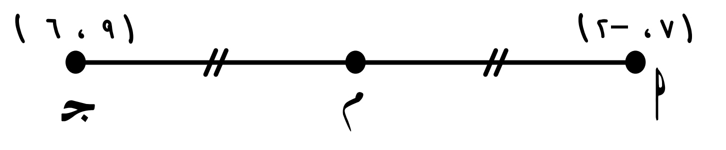


ا ب جـ ء متوازي أضلاع فيه ا = (٧، -٢)، ب = (١٥، ٤)، جـ = (٩، ٦) أوجد إحداثي نقطة تقاطع القطرين ثم أوجد نقطة ء

الحل

∵ ا ب جـ ء متوازي الأضلاع

∴ القطران ينصف كلاً منهما الآخر



∴ نفرض أن م هي نقطة تقاطع القطرين

∴ احداثى منتصف $\overline{\text{ا جـ}}$ = م = ((س١ + س٢)/٢ ، (ص١ + ص٢)/٢) = ((٧ + ٩)/٢ ، (-٢ + ٦)/٢)

= (١٦/٢ ، ٤/٢) = (٨ ، ٢)

(١٥ ، ٤)   (س ، ص)
ب   م   ء

∴ احداثى منتصف $\overline{\text{ب ء}}$ = ((س١ + س٢)/٢ ، (ص١ + ص٢)/٢) = ((١٥ + س)/٢ ، (٤ + ص)/٢)

احداثى منتصف $\overline{\text{ا جـ}}$ = احداثى منتصف $\overline{\text{ب ء}}$ ∴ ((١٥ + س)/٢ ، (٤ + ص)/٢) = (٨ ، ٢)

∴ (١٥ + س)/٢ = ٨   ∴ (٤ + ص)/٢ = ٢

∴ ١٥ + س = ١٦   ∴ ٤ + ص = ٤

∴ س = ١   ∴ ص = ٠

∴ إحداثيات نقطة د = (١ ، ٠) #



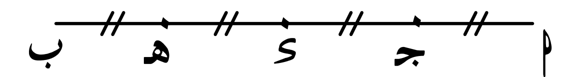
مثال [١٠]

أوجد النقط التى تقع عند ربع المسافة بين النقطتين ٢ ، ب حيث ٢ =(−٨ ، −٦) ، ب = (٤ ، −١٠)

الحل

بفرض أن : ٢ب قطعة مستقيمة ، جـ ، ء ، هـ ثلاث نقط تقع على ٢ب

بحيث ٢جـ = جـء = ءهـ = هـب



ء منتصف ٢ب = $\left(\frac{س_١ + س_٢}{٢} ، \frac{ص_١ + ص_٢}{٢} \right) = \left(\frac{-٨ + ٤}{٢} ، \frac{-٦ - ١٠}{٢} \right) = \left(-\frac{٤}{٢} ، -\frac{١٦}{٢} \right) = (-٢ ، -٨)$

جـ منتصف ٢ء = $\left(\frac{س_١ + س_٢}{٢} ، \frac{ص_١ + ص_٢}{٢} \right) = \left(\frac{-٨ -٢}{٢} ، \frac{-٦ - ٨}{٢} \right) = \left(\frac{-١٠}{٢} ، \frac{-١٤}{٢} \right)$

$= (-٥ ، -٧)$

هـ منتصف بء = $\left(\frac{س_١ + س_٢}{٢} ، \frac{ص_١ + ص_٢}{٢} \right) = \left(\frac{٤ -٢}{٢} ، \frac{-١٠ - ٨}{٢} \right) = \left(\frac{٢}{٢} ، \frac{-١٨}{٢} \right)$

$= (١ ، -٩)$

تمارين على احداثى نقطة التنصيف

[١] اكمل ماياتى :

❶ إذا كانت : أ (س١ ، ص١) ، ب (س٢ ، ص٢) ، م منتصف $\overline{أب}$ فان احداثى نقطة م = ...

❷ منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين (٥ ، ٢) ، (–٣ ، ٠) هى ....

❸ منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين (–٦ ، ٤) ، نقطة الأصل هى ....

❹ منتصف $\overline{أب}$ حيث أ (١ ، ٣) ، ب (٠ ، –٥) هى ....

❺ إذا كانت : م (٤ ، –٧) منتصف $\overline{أب}$ حيث أ (٥ ، ص) ، (٣ ، –٣) فان ص = ...

❻ إذا كانت : م (٢ ، ٧) هى نقطة تقاطع قطرى متوازى الأضلاع أ ب جـ ء حيث أ (٣ ، ١) فان جـ هى ......

❼ إذا كانت النقطة ($\frac{١}{٢}$ ، ٠,٧٥) هى منتصف القطعة المستقيمة $\overline{أب}$ حيث أ (٢ ، ٨) ، ب (–١ ، س) فان قيمة س = ...

❽ إذا كانت أ (٣ ، ص) ، ب (٥ ، –٢) ، جـ منتصف $\overline{أب}$ حيث جـ (س ، ٢) فان قيمة س = ... ، ص = ...

❾ إذا كان ب (–٢ ، ٣) ، جـ (٤ ، ١) فان احداثى نقطة منتصف $\overline{بجـ}$ هى ....

❿ احداثى نقطة منتصف $\overline{بجـ}$ حيث ، ب (٣ ، ٢) ، جـ (٥ ، ٤) يساوى................

⓫ إذا كانت أ ، ب ، جـ ، ء أربع نقط على استقامة واحدة وكان أ ب = ب جـ = جـ ء وكانت أ (١ ، ٣) ، جـ (٥ ، ١)

أوجد احداثى نقطة ب = ... ، ء = ...

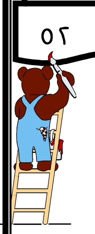
⓬ $\overline{أء}$ متوسط فى △ أ ب جـ ، م منتصف $\overline{أء}$ حيث أ (٠ ، ٨) ، ب (٣ ، ٢) ، جـ (–٣ ، ٦)

فان احداثى النقطة ء (...... ، ......) ، النقطة م (...... ، ......)

⓭ إذا كان $\overline{ءهـ}$ قطر فى دائرة م وكانت ء (–١ ، ٨) ، م (٣ ، ٢) فان هـ = (.... ، ....)

⓮ إذا كانت و نقطة الأصل هى منتصف $\overline{أب}$ حيث أ (٦ ، –٤) فان احداثى ب (... ، ...)

⓯ إذا كانت أ (٧ ، –٤) ، ب (٣ ، ص) ، جـ (س ، ٠) وكانت جـ منتصف $\overline{أب}$ فان س= ... ، ص = ...



٢] اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات التالية

❶ إذا كانت : أ (٤ ، ٤) ، ب (٦ ، ٢) فان منتصف أب النقطة ....

(أ) (٦ ، ١٠) (ب) (١٠ ، ٦) (ج) (٥ ، ٣) (د) (٣ ، ٥)

❷ إذا كانت أ (١ ، ٣) ، ب (٣ ، –٥) فان احداثى نقطة منتصف أب هى ....

(أ) (٢ ، ١) (ب) (٢ ، ٤) (ج) (٢ ، –١) (د) (–٢ ، ١)

❸ إذا كانت جـ (٢ ، ١) هى منتصف أب حيث أ (–٤ ، –١) فان احداثي ب = ...

(أ) (١٦ ، ٠) (ب) (٨ ، ٣) (ج) (–٢ ، ٠) (د) (١ ، ٢)

❹ إذا كانت (٣ ، –١) هى منتصف القطعة المستقيمة التى طرفيها (س ، ٢) ، (١٠ ، ص) فان : س + ص = ...

(أ) ١٢ (ب) –٨ (ج) ٢ (د) –٢

❺ إذا كانت نقطة الأصل هى منتصف القطعة المستقيمة أب حيث أ (٣ ، - ٤) فان ب هى ....

(أ) (–٣ ، –٤) (ب) (٣ ، ٤) (ج) (–٣ ، ٤) (د) (٠ ، ٠)

❻ إذا كانت نقطة جـ (١ ، ٠) هى منتصف أب وكانت أ (١ ، ٣) فان ب = ...

(أ) (٠ ، ٣) (ب) (١ ، ٣) (ج) (–١ ، ٠) (د) (١ ، –٣)

❼ إذا كانت جـ (٤ ، ٥) هى منتصف أب حيث أ (٣ ، ٤) ، ب (٥ ، ك) فان ك =.............

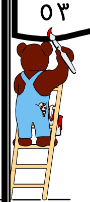
(أ) ١٠ (ب) ٦ (ج) ٥ (د) ٤

❽ احداثى منتصف القطعة المستقيمة المرسومة بين النقطتين (٢ ، ٢) ، (–٢،–٢) هى ....

(أ) (١ ، ١) (ب) (٢،١) (ج) (٢ ، ٢) (د) (٠ ، ٠)

❾ احداثى منتصف القطعة المستقيمة المرسومة بين النقطتين (٢ ، ٤) ، (٣ ، ٥) هى ....

(أ) (٢ ، ٣) (أ) (٥ ، ٩) (ج) ($\frac{٥}{٢}$ ، ٩) (د) ($\frac{٥}{٢}$ ، $\frac{٩}{٢}$)



[٣] اوجد احداثى منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ حيث أ (٣ ، ٢) ، ب (٥ ، ٤)

[٤] إذا كانت ء = (٣ ، −٢) منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ حيث أ = (س ، ٢) ، ب = (٣ ، ص) فاوجد قيمتي س ، ص ؟

[٥] النقطة (٣ ، −٢) هى منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين (أ ، ٢) ، (٣ ، ب)

[٦] إذا كانت أ (−٢ ، ٨) هى منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$ حيث ب (٣ ، −٢) احسب احداثى نقطة جـ

[٧] إذا كانت النقطة (٤ ، − ٢) منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ حيث أ(٢ ، ص) ، ب (س − ١ ، ٣)احسب قيمة س ، ص

[٨] إذا كانت النقطة (−٣ ، −١) منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ حيث ا (س ، ص−١)، ب (س +٣ ، ٥) احسب قيمة س ، ص

[٩] إذا كانت : ع (١٠ ، −٤) منتصف $\overline{\text{س ص}}$ حيث س (٤ ، −٢) فاوجد احداثى ص

[١٠] إذا كانت أ (٣ ، ٠) ، ب (−٢ ، −١) ، جـ (٠ ، ٥) ، ء (٥ ، ٦) اثبت أن الشكل أ ب جـ ء متوازى أضلاع

[١١] اثبت أن أ (٢ ، ٤) ، ب (−٧ ، ٥) ، جـ (−٣ ، ٠) ، ء (−٢ ، ٩) هى رؤوس متوازى الأضلاع

[١٢] أ ب جـ ء متوازي أضلاع حيث : أ (٧ ، ٢) ، ب (١٥ ، ٤) ، جـ (٩ ، ٦) فأوجد احداثى نقطة ء

[١٣] أوجد قيمة س ، ص : إذا كان أ ب جـ ء متوازى أضلاع حيث : أ (س ، ٥) ، ب (٣ ، −١) ، جـ (−٤ ، ٢) ، ء (١ ، ص)

[١٤] إذا كانت : جـ منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ حيث أ (٢ ، ٣) ، ب (٤ ، −٧) ، وكانت جـ منتصف $\overline{\text{ء هـ}}$ حيث ء (−٣ ، ٥)

فأوجد احداثى نقطة هـ ، ثم اثبت أن الشكل المكون من النقط أ ، ب ، ء ، هـ متوازى أضلاع

[١٥] △ أ ب جـ فيه أ (١ ، ٣) ، ب (٥ ، ١) ، جـ (٣ ، ٧) فاذا كانت ء منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ، هـ منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$ برهن أن ء هـ $= \frac{1}{2}$ ب جـ

[١٦] فى الشكل المقابل : $\overline{\text{أ ب}}$ قطعة مستقيمة ، جـ ، ء ، هـ ثلاث نقط تقع على $\overline{\text{أ ب}}$

بحيث أ جـ = جـ ء = ء هـ = هـ ب

فإذا كان أ (−٢ ، ١) ، ب (٦ ، ٥) فأوجد احداثى النقط جـ ، ء ، هـ

[١٧] إذا كانت : أ (١ ، −٦) ، ب (٩ ، ٢) فأوجد إحداثيات النقط التى تقسم $\overline{\text{أ ب}}$ إلى أربعة أجزاء متساوية فى الطول

[١٨] إذا كانت : أ ∈ محور السينات ، ب ∈ محور الصادات ، جـ (−٤ ، ٢) منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ فأوجد احداثى كل من أ ، ب

مع أرق تمنياتي بالنجاح والتفوق ... أ/ وليد رشدي

[١٩] إذا كانت : أ(-١ ، -١) ، ب(٢ ، ٢) ، جـ(٦ ، ٠) ، ء(٣ ، -٣) أربع نقط فى مستوى احداثى متعامد

اثبت أن : أ جـ ، ب ء ينصف كلا منهما الآخر .

[٢٠] إذا كانت النقط : أ(-١ ، ٢) ، ب(٣ ، ٧) ، جـ(٤ ، ٥) ، ء(س-١ ، ص-٢)

رؤوس متوازى الأضلاع أ ب جـ ء فأوجد قيمة س ، ص

[٢١] اثبت أن النقط : أ(٦ ، ٠) ، ب(٢ ، -٤) ، جـ(-٤ ، ٢) هى رؤوس △ قائم الزاوية فى ب

ثم أوجد احداثيي نقطة ء التى تجعل الشكل أ ب جـ ء مستطيلا .

[٢٢] إذا كان : أ(٢ ، ٣) ، ب(٠ ، ل) ، جـ(ن ، ١) ثلاث نقط فى مستوى احداثى متعامد وكانت نقطة ب هى

منتصف أ جـ فأوجد قيمتى ل ، ن ثم احسب طول كل من : أ ب ، ب جـ ، أ جـ ماذا تلاحظ ؟

[٢٣] △ أ ب جـ فيه أ(٢ ، -٢) ، ب(٨ ، ٤) ، جـ(٥ ، ٧)

اثبت أن : (أ) △ أ ب جـ قائم الزاوية فى ب (ب) أوجد مركز الدائرة المارة برؤوس △ أ ب جـ

[٢٤] إذا كانت النقط : أ(٣ ، ٢) ، ب(٤ ، -٣) ، جـ(-١ ، -٢) ، ء(-٢ ، ٣) هى رؤوس معين فأوجد :

(أ) احداثى نقطة تقاطع القطرين . (ب) مساحة المعين أ ب جـ ء .

[٢٥] أ ب جـ ء متوازى أضلاع فيه : أ(٣ ، ٤) ، ب(٢ ، -١) ، جـ(-٤ ، -٣) أوجد احداثيى ء ، خذ هـ

∈ ء أ حيث أ هـ = ٢ أ ء أوجد احداثى النقطة هـ ؟

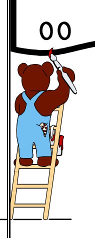
[٢٦] أ ب جـ ء شبه منحرف فيه ب جـ = ٢ أ ء وكان : أ(٦ ، ٤) ، ب(٤ ، -٢) ، جـ(-٢ ، -٤) فأوجد احداثيى نقطة ء

حيث ب جـ // أ ء (إرشاد : أكمل متوازى الأضلاع أ ب جـ هـ واستخدمه فى إيجاد ء)

[٢٧] اوجد احداثى النقطة التى تقع عند ربع المسافة بين أ ، ب من جهة أ حيث أ(٨ ، -٤) ، ب(-١٢ ، ٢)

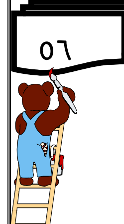
[٢٨] إذا كانت أ(٠ ، ٥√٢) ، ب(٠ . -٢√٣) تمر بنقطة الأصل

[٢٩] إذا كانت أ(١ ، ١) ، ب(-١ ، -١) فاثبت أن أ ب يمر بنقطة الأصل



الدرس الرابع

العلاقة بين ميلى مستقيمين



ميل الخط المستقيم

[١] ميل الخط المستقيم المار بالنقطتين ($س_١$ ، $ص_١$) ، ($س_٢$ ، $ص_٢$)

$$\text{الميل } م = \frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{\text{التغير الرأسى}}{\text{التغير الأفقى}} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$$

✍ **مثال [١]**

اوجد ميل المستقيم المار بالنقطتين (٣ ، ٤) ، (٢ ، ١)

$$\text{الميل } م = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{١ - ٤}{٢ - ٣} = \frac{-٣}{-١} = ٣$$

ملاحظات

❶ ميل محور السينات سَ يساوى صفر
❷ ميل أي مستقيم يوازى محور السينات سَ يساوى صفر
❸ ميل أي مستقيم أفقي يساوى صفر
❹ ميل محور الصادات صَ يساوى غير معرف
❺ ميل أى مستقيم يوازى محور الصادات صَ غير معرف
❻ ميل أي مستقيم رأسي غير معرف

القياس الموجب

هو القياس التى يكون فيها الضلع النهائى للزاوية يتحرك فى اتجاه عكس حركة عقارب الساعة

القياس السالب

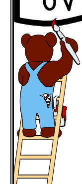
هو القياس التى يكون فيها الضلع النهائى للزاوية يتحرك فى اتجاه حركة عقارب الساعة

ميل المستقيم

هو ظل الزاوية الموجبة التى يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

أى أن : ميل الخط المستقيم = طا هـ

حيث هـ هى الزاوية الموجبة التى يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات



ملاحظات

❶ إذا كان الميل كمية موجبة فان المستقيم يصنع زاوية حادة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات س~

❷ إذا كان الميل كمية سالبة فان المستقيم يصنع زاوية منفرجة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات س~

❸ إذا كان الميل يساوى صفر فان المستقيم يوازى محور السينات أو ينطبق علي محور س~

❹ إذا كان الميل يساوى غير معرف فان المستقيم يوازى محور الصادات أو ينطبق علي محور ص~



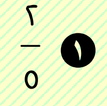
مثال [٢]

أوجد ميل المستقيم الذي يصنع زاوية موجبة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات قياسها

❶ ٤٥° ❷ ٣٥ً ٥٤َ ٧٨°

(أ) ظا ٤٥° = ١ tan ٤٥ =

(ب) ظا ٣٥ً ٥٤َ ٧٨° = ٥,١٠١٦ tan ٧٨° ٥٤َ ٣٥ً =



مثال [٣]

أوجد قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات إذا كان ميله

❶ $\frac{٢}{٥}$ ❷ ١,٢٣٥

❶

0... = $\frac{٢}{٥}$ tan shift

ظا هـ = $\frac{٢}{٥}$ ق(∠هـ) = ٥ً ٤٨َ ٢١°

❷

0... = ١,٢٣٥ tan shift

ظا هـ = ١,٢٣٥ ق(∠هـ) = ٨ً ٠َ ٥١°

✍ **مثال [٤]**

أوجد قياس الزاوية الموجبة (هـ) التى يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات إذا كان يمر بالنقطتين (٣ ، ١) ، (٥ ، ٦)

∴ الميل م $= \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٦ - ١}{٥ - ٣} = \frac{٥}{٢}$

الميل كمية موجبة فان المستقيم يصنع زاوية حادة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات س

وباستخدام الحاسبة ظا هـ $= \frac{٥}{٢}$ shift tan $\frac{٥}{٢}$ = ∴ ق(∠ هـ) = ″٥٤ ′١١ °٦٨

✍ **مثال [٥]**

أوجد قياس الزاوية الموجبة (هـ) التى يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات إذا كان يمر بالنقطتين (٢ ، ٥$\sqrt{٣}$) ، (٤ ، ٧$\sqrt{٣}$)

∴ الميل م $= \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٧\sqrt{٣} - ٥\sqrt{٣}}{٤ - ٢} = \frac{٢\sqrt{٣}}{٢} = \sqrt{٣}$ ∴ المستقيم يصنع زاوية حادة مع الاتجاه $س^+$

وباستخدام الحاسبة ظا هـ = $\sqrt{٣}$ ∴ ق(∠ هـ) = °٦٠

✍ **مثال [٦]**

أوجد قياس الزاوية الموجبة (هـ) التى يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات إذا كان يمر بالنقطتين (١ ، −١) ، (−٢ ، ٢)

∴ م $= \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٢ + ١}{-٢ - ١} = \frac{٣}{-٣} = -١$ فان المستقيم يصنع زاوية منفرجة مع الاتجاه $س^+$

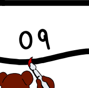
وباستخدام الحاسبة ظا هـ = ١ ∴ ق(هـ) الحادة = °٤٥ ∴ ق(∠ هـ) = ١٨٠ − ٤٥ = °١٣٥

✍ **مثال [٧]**

إذا كان المستقيم المار بالنقطتين (٢ ، −١) ، (٦ ، ص) يصنع زاوية قياسها °٤٥ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات احسب قيمة ص

∴ الميل م $= \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{ص + ١}{٦ - ٢} = \frac{ص + ١}{٤}$ ∴ الميل م = ظا هـ = ظا °٤٥ = ١

∴ م $= \frac{ص + ١}{٤} = ١$ ∴ ص + ١ = ٤ ∴ ص = ٣



ميل الخط المستقيم الذى معادلته : ص = م س + جـ

هـــو معامل س = م ، الجزء المقطوع من محور الصادات هو جـ



✍ **مثال [٨]**

اوجد ميل الخط المستقيم : ٢ص = ٣ س – ٦

الحل ∴ ٢ص = ٣ س – ٨ بالقسمة على ٢ ∴ ص = $\frac{٣}{٢}$ س – ٤ ∴ الميل = معامل س = $\frac{٣}{٢}$

ميل الخط المستقيم الذى معادلته : أ س + ب ص + جـ = ٠

هــو $\frac{\text{سالب معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$

✍ **مثال [٩]**

اوجد ميل المستقيم الذى معادلته : ٢س + ٣ص = ٥

الحل الميل = $\frac{\text{سالب معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{-٢}{٣}$

✍ **مثال [١٠]**

اوجد ميل المستقيم الذى معادلته : ٥س = ٤ص + ٧

٥ س – ٤ ص = ٧ الميل = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{-٥}{-٤} = \frac{٥}{٤}$

العلاقة بين ميلى مستقيمين متوازيين .

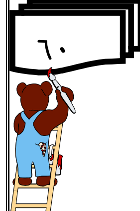
المستقيمان المتوازيان ميلهما متساويان والعكس صحيح

إذا كان $م_١$ ميل المستقيم $ل_١$ ، $م_٢$ ميل المستقيم $ل_٢$ وكان $م_١ = م_٢$

∴ **المستقيم $ل_١$ // المستقيم $ل_٢$**

إذا كان $م_١$ ميل المستقيم $ل_١$ ، $م_٢$ ميل المستقيم $ل_٢$ وكان المستقيم $ل_١$ // المستقيم $ل_٢$

∴ $م_١ = م_٢$



ملاحظات هامة

إذا كان المستقيم $ل_1$ // المستقيم $ل_2$

❶ $م_1 = م_2$ ❷ $م_1 - م_2 = ٠$

❸ $م_1 + م_2 = ٢م_1 = ٢م_2$

❹ $\frac{م_1}{م_2} = ١$ إلا إذا كانا يوازيان محور السينات أو يوازيان محور الصادات

❺ الفرق بين ميلى أى مستقيمين متوازيين = صفر

✍ **مثال [١١]**

اثبت أن المستقيم المار بالنقطتين أ(١ ، -٣) ، ب(٠ ، ٢) يوازى المستقيم المار بالنقطتين جـ(٧ ، -٦) ، د(٨ ، -١١)

بفرض أن $م_1$ هو ميل $\overleftrightarrow{أب}$ $م_1 = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1} = \frac{٢ + ٣}{٠ - ١} = \frac{٥}{-١} = -٥$

بفرض أن $م_2$ هو ميل $\overleftrightarrow{جـ د}$ $م_2 = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1} = \frac{-١١ + ٦}{٨ - ٧} = \frac{-٥}{١} = -٥$

∵ ميل المستقيم الأول $م_1$ = ميل المستقيم الثانى $م_2$ ∴ المستقيمان متوازيان

✍ **مثال [١٢]**

اثبت أن المستقيم الذى معادلته : ٤س - ٧ص = ٣ يوازى المستقيم الذى يمر بالنقطتين أ(-٤ ، ١) ، ب(٣ ، ٥)

ميل المستقيم الأول ∴ الميل = $\frac{- \text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{-٤}{-٧} = \frac{٤}{٧}$

∵ المستقيم الثانى يمر بالنقطتين أ(-٤ ، ١) ، ب(٣ ، ٥)

∴ ميل المستقيم الثانى = $\frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1} = \frac{٥ - ١}{٣ + ٤} = \frac{٤}{٣ + ٤} = \frac{٤}{٧}$

∵ ميل المستقيم الأول $م_1$ = ميل المستقيم الثانى $م_2$ ∴ المستقيمان متوازيان

✍ **مثال [١٣]**

اثبت أن المستقيم المار بالنقطتين ٩ (٣ ، ٦) ، ب(٥ ، ٨) يوازى المستقيم الذي يصنع زاوية قياسها ٤٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

بفرض أن $م_١$ هو ميل $\overleftrightarrow{٩ب}$　　$م_١ = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٨ - ٦}{٥ - ٣} = \frac{٢}{٢} = ١$

بفرض أن $م_٢$ هو ميل المستقيم الذي يصنع زاوية قياسها ٤٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

$م_٢ = ظا هـ = ظا ٤٥° = ١$

∵ ميل المستقيم الأول $م_١$ = ميل المستقيم الثانى $م_٢$　　∴ المستقيمان متوازيان

✍ **مثال [١٤]**

اثبت أن المستقيم الذى معادلته : ٣س + ٢ص = ٤ يوازى المستقيم الذى معادلته : ٤ص = ٦س − ٨

الحل　　∴ ميل المستقيم الأول $م_١ = \frac{- \text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{-٣}{٢}$

∵ المستقيم الثانى : ٤ص =− ٦س + ٨　　٦س + ٤ص = ٨

∴ ميل المستقيم الثانى $م_٢ = \frac{- \text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{-٦}{٤} = \frac{-٣}{٢}$

∵ ميل المستقيم الأول $م_١$ = ميل المستقيم الثانى $م_٢$　　∴ المستقيمان متوازيان

✍ **مثال [١٥]**

إذا كان المستقيم المار بالنقطتين ٩ (− $\sqrt{٣}$ ، − ٢) ، ب(٢$\sqrt{٣}$ ، ص) يوازى المستقيم الذي يصنع زاوية قياسها ٦٠° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات احسب قيمة ص

بفرض أن $م_١$ هو ميل $\overleftrightarrow{٩ب}$　　$م_١ = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{ص + ٢}{٢\sqrt{٣} + \sqrt{٣}} = \frac{ص + ٢}{٣\sqrt{٣}}$

بفرض أن $م_٢$ هو ميل المستقيم الذي يصنع زاوية قياسها ٦٠° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

$م_٢ = ظا هـ = ظا ٦٠° = \sqrt{٣}$

∵ المستقيمان متوازيان　　∴ ميل المستقيم الأول $م_١$ = ميل المستقيم الثانى $م_٢$

$\frac{ص + ٢}{٣\sqrt{٣}} = \sqrt{٣}$　　∴ ص + ٢ = ٣ × ٣　　∴ ص + ٢ = ٩　　∴ ص = ٧

مثال [١٦]

إذا كان المستقيم المار بالنقطتين أ (٤ ، ٢) ، ب (س ، ٦) يوازى المستقيم المار بالنقطتين جـ (٠ ، ٥) ، د (-١ ، ١)

احسب قيمة س ، قياس الزاوية التى يصنعها المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

الحل بفرض أن م١ هو ميل $\overleftrightarrow{أب}$ م١ = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$ = $\frac{٦ - ٢}{س - ٤}$ = $\frac{٤}{س - ٤}$

بفرض أن م٢ هو ميل $\overleftrightarrow{جـ د}$ م٢ = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$ = $\frac{١ - ٥}{-١ - ٠}$ = $\frac{-٤}{-١}$ = ٤

∵ المستقيمان متوازيان   ∴ ميل المستقيم الأول م١ = ميل المستقيم الثانى م٢

∴ $\frac{٤}{س - ٤}$ = ٤   بضرب طرفين × وسطين

∴ ٤س - ١٦ = ٤   ∴ ٤س = ١٦ + ٤   ∴ ٤س = ٢٠

∴ س = $\frac{٢٠}{٤}$ ∴ س = ٥

قياس الزاوية التى يصنعها المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات = ظا هـ = م = ٤

باستخدام الآلة الحاسبة [٥...] [=] ٤ [tan] [shift]   ∴ (هـ) = ٥٠″ ٥٧′ ٧٥°

مثال [١٧]

إذا كان المستقيم الذى معادلته : ب س + ٣ص = ٢ يوازى المستقيم المار بالنقطتين أ (٢ ، ٤) ، ب (-١ ، ٥)

فأوجد قيمة ب

ميل المستقيم الأول = $\frac{- \text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$ = $\frac{- ب}{٣}$

ميل المستقيم الأول = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$ = $\frac{٥ - ٤}{-١ - ٢}$ = $\frac{١}{-٣}$ = $\frac{-١}{٣}$

المستقيمان متوازيان   ∴ ميل المستقيم الأول = ميل المستقيم الثانى

∴ $\frac{-ب}{٣}$ = $\frac{-١}{٣}$ ∴ -٣ب = -٣   ∴ ب = $\frac{-٣}{-٣}$ ∴ ب = ١

✍ **مثال [١٨]**

إذا كان المستقيم المار بالنقطتين ᵖ (–٣ ، –٢) ، ب (–٢ ، ص) يوازى محور السينات فأوجد قيمة ص

بفرض أن $م_١$ هو ميل $\overleftrightarrow{ᵖب}$ ∴ $م_١ = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{ص + ٢}{-٢ + ٣} = \frac{ص + ٢}{١} = ص + ٢$

بفرض أن $م_٢$ هو ميل المستقيم الموازى لمحور السينات ∴ $م_٢$ = صفر

∵ المستقيمان متوازيان

∴ ميل المستقيم الأول $م_١$ = ميل المستقيم الثانى $م_٢$

∴ $\frac{ص + ٢}{١} = ٠$ ∴ ص + ٢ = ٠ ∴ ص = –٢

✍ **مثال [١٩]**

إذا كان المستقيم المار بالنقطتين ᵖ (–٦ ، –١) ، ب (س ، ٩) يوازى محور الصادات فأوجد قيمة س

بفرض أن $م_١$ هو ميل $\overleftrightarrow{ᵖب}$ ∴ $م_١ = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٩ + ١}{س + ٦} = \frac{١٠}{س + ٦}$

بفرض أن $م_٢$ هو ميل المستقيم الموازى لمحور الصادات ∴ $م_٢$ = غير معرف

∵ المستقيمان متوازيان

∴ ميل المستقيم الأول $م_١$ = ميل المستقيم الثانى $م_٢$

$\frac{١٠}{س + ٦}$ = غير معرف = $\frac{١٠}{صفر}$ المقام = صفر

∴ س + ٦ = ٠ ∴ س = –٦

مثال [٢٠]

اثبت أن النقط : ﺃ(-٢ ، ٤) ، ب(٥ ، -٣) ، جـ(٧ ، ١) ، ء(٠ ، ٨) هى رؤوس متوازي أضلاع ؟

ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$ = $\frac{-٣ - ٤}{٥ + ٢}$ = $\frac{-٧}{٧}$ = -١

ميل $\overleftrightarrow{جـء}$ = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$ = $\frac{٨-١}{٠-٧}$ = $\frac{٧}{٥+٢}$ = $\frac{-٧}{٧}$ = -١ = -١

ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = ميل $\overleftrightarrow{جـء}$ = -١ $\overleftrightarrow{أب}$ // $\overleftrightarrow{جـء}$ ....❶

ميل $\overleftrightarrow{أء}$ = $\frac{٨ - ٤}{٠ + ٢}$ = $\frac{٤}{٢}$ = ٢ ميل $\overleftrightarrow{بجـ}$ = $\frac{١ + ٣}{٧ - ٥}$ = $\frac{٤}{٢}$ = ٢

ميل $\overleftrightarrow{أء}$ = ميل $\overleftrightarrow{بجـ}$ = ٢ $\overleftrightarrow{أء}$ // $\overleftrightarrow{بجـ}$ ....❷

من ❶ ، ❷ نجد أن الشكل أب جـ ء متوازى أضلاع

مثال [٢١]

اثبت أن النقط ﺃ(٧ ، ٤) ، ب(٣ ، -٢) ، جـ(٢ ، ٠) ، ء(٤ ، ٣) هى رؤوس شبه منحرف

ميل $\overline{أب}$ = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$ = $\frac{-٢-٤}{٣-٧}$ = $\frac{-٦}{-٤}$ = $\frac{٣}{٢}$ ميل $\overline{جـء}$ = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$ = $\frac{٠-٣}{٢-٤}$ = $\frac{-٣}{-٢}$ = $\frac{٣}{٢}$

ميل $\overline{أب}$ = ميل $\overline{جـء}$ $\overline{أب}$ // $\overline{جـء}$ ....❶

أب = $\sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$ = $\sqrt{(٧-٣)^٢ + (٤ + ٢)^٢}$

= $\sqrt{(٤)^٢ + (٦)^٢}$ = $\sqrt{١٦+٣٦}$ = $\sqrt{٥٢}$ = ٢$\sqrt{١٣}$

جـء = $\sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$ = $\sqrt{(٢-٤)^٢ + (٠ - ٣)^٢}$

= $\sqrt{(-٢)^٢ + (-٣)^٢}$ = $\sqrt{٤+٩}$ = $\sqrt{١٣}$

أب ≠ جـء ....❷ من ❶ ، ❷

الشكل أب جـ ء شبه منحرف

مثال [٢٢]

اثبت أن النقط أ (٢،٣) ، ب (١،١) ، جـ (٠،−١) تقع على استقامة واحدة ؟

الحل

ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = $\frac{١ - ٣}{١ - ٢}$ = $\frac{-٢}{-١}$ = ٢ .... ❶

ميل $\overleftrightarrow{ب جـ}$ = $\frac{-١-١}{٠-١}$ = $\frac{-٢}{-١}$ = ٢ ....❷ من ❶ ، ❷

ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = ميل $\overleftrightarrow{ب جـ}$ $\overleftrightarrow{أب}$ // $\overleftrightarrow{ب جـ}$ النقطة ب نقطة مشتركة

أ ، ب ، جـ تقع على استقامة واحدة

مثال [٢٣]

إذا كانت النقط أ (١ ، ٣) ، ب (٤ ، ١) ، جـ (٥ ، ص) على استقامة واحدة احسب قيمة ص

ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = $\frac{١ - ٣}{٤ - ١}$ = $\frac{٢ -}{٣}$ .... ❶

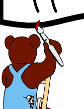
ميل $\overleftrightarrow{ب جـ}$ = $\frac{ص - ١}{٥ - ٤}$ = $\frac{ص - ١}{١}$ = ص − ١ ....❷ من ❶ ، ❷

أ ، ب ، جـ تقع على استقامة واحدة

ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = ميل $\overleftrightarrow{ب جـ}$

∴ ص − ١ = $\frac{٢ -}{٣}$ ∴ ٣ص − ٣ = −٢

٣ص = −٢ + ٣ ٣ص = ١ ص = $\frac{١}{٣}$




العلاقة بين ميلى مستقيمين متعامدين .

❶ المستقيمان المتعامدان حاصل ضرب ميلهما يساوى سالب واحد والعكس صحيح

❷ إذا كان $م_1$ ميل المستقيم $ل_1$ ، $م_2$ ميل المستقيم $ل_2$ وكان $م_1 \times م_2 = -1$ فان $ل_1 \perp ل_2$

❸ إذا كان $م_1$ ميل المستقيم $ل_1$ ، $م_2$ ميل المستقيم $ل_2$ وكان $ل_1 \perp ل_2$ فان $م_1 \times م_2 = -1$

❹ إذا كان $م_1$ ميل المستقيم $ل_1$ ، $م_2$ ميل المستقيم $ل_2$ وكان $ل_1 \perp ل_2$ فان $م_1 \times م_2 + 1 = 0$

❺ إذا كان $م_1$ ميل المستقيم $ل_1$ ، $م_2$ ميل المستقيم $ل_2$ وكان $ل_1 \perp ل_2$ فان $م_1 = \frac{-1}{م_2}$ أو $م_2 = \frac{-1}{م_1}$

❻ أى أن : حاصل ضرب ميلى مستقيمين متعامدين = -1

❼ إذا كان حاصل ضرب ميلي مستقيمان = -1 فان المستقيمان متعامدان

ملاحظات هامة :

❶ **حاصل ضرب ميلى قطرى المعين** = -1

❷ **حاصل ضرب ميلى قطرى المربع** = -1

❸ **حاصل ضرب ميلى ضلعى المربع** = -1

❹ **حاصل ضرب ميلى ضلعى المستطيل** = -1

❺ **حاصل ضرب ميلى ضلعى القائمة فى مثلث قائم** = -1

❻ **إذا كان ميل مستقيم** = $\frac{3}{7}$ **فان ميل المستقيم العمودي عليه** = $\frac{-7}{3}$

❼ **إذا كان ميل أحد قطري معين** = -2 **فان ميل القطر الآخر** = $\frac{1}{2}$

✍ **مثال [١]**

أوجد ميل المستقيم العمودي على المستقيم المار بالنقطتين ﻫ(٦ ، ٠) ، ب(− ٤ ، ٢)

بفرض أن $م_١$ هو ميل $\overleftrightarrow{ﻫ ب}$ ∴ $م_١ = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٢ - ٠}{-٤ - ٦} = \frac{٢}{-١٠} = \frac{-١}{٥}$

∴ $م_٢$ هو ميل المستقيم العمودي على $\overleftrightarrow{ﻫ ب} = \frac{٥}{١} = ٥$

✍ **مثال [٢]**

اوجد ميل المستقيم العمودي على المستقيم ٧س − ٢ ص = ١

ميل المستقيم ٧س − ٢ ص = ١ هو $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{-٧}{-٢} = \frac{٧}{٢}$

ميل المستقيم العمودي عليه هـــــو $\frac{-٢}{٧}$

✍ **مثال [٣]**

ميل المستقيم العمودي على المستقيم الذي يصنع زاوية قياسها ١٣٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

ميل المستقيم المعلوم = طا ١٣٥° = −١　∴ ميل المستقيم العمودي على المستقيم المعلوم = ١

✍ **مثال [٤]**

إذا كان : ﻫ(٢ ، ٤) ، ب(− ١ ، ٥) ، جـ(١ ، ٣) ، ء(٢ ، ٦) اثبت أن : $\overleftrightarrow{ﻫ ب} \perp \overleftrightarrow{جـ ء}$

بفرض أن $م_١$ هو ميل $\overleftrightarrow{ﻫ ب}$　$م_١ = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٥ - ٤}{-١ - ٢} = \frac{١}{-٣} = \frac{-١}{٣}$

بفرض أن $م_٢$ هو ميل $\overleftrightarrow{جـ ء}$　$م_٢ = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٦ - ٣}{٢ - ١} = \frac{٣}{١} = ٣$

$م_١ \times م_٢ = (-\frac{١}{٣})(٣) = -١$

المستقيمان متعامدان

✍ **مثال [٥]**

اثبت أن المستقيم المار بالنقطتين ﺃ (- ٣ ، ٤) ، (- ٤ ، ٥) عمودى على المستقيم الذي يصنع زاوية قياسها ٤٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

بفرض أن $م_١$ هو ميل $\overleftrightarrow{ﺃب}$

$$م_١ = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٥ - ٤}{-٤ + ٣} = \frac{١}{-١} = -١$$

بفرض أن $م_٢$ هو ميل المستقيم الذي يصنع زاوية قياسها ٤٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

$م_٢$ = ظا هـ = ظا ٤٥° = ١

$م_١ \times م_٢ = (-١)(١) = -١$

∴ المستقيمان متعامدان

✍ **مثال [٦]**

إذا كان المستقيم المار بالنقطتين ﺃ (٥ ، $\sqrt{٣}$) ، (٢ ، $٢\sqrt{٣}$) عمودى على المستقيم الذي يصنع زاوية قياسها هـ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات فأوجد ق (هـ)

الحل بفرض أن $م_١$ هو ميل $\overleftrightarrow{ﺃب}$

$$م_١ = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٢\sqrt{٣} - \sqrt{٣}}{٢ - ٥} = \frac{\sqrt{٣}}{-٣} \times \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}} = \frac{٣}{-٣\sqrt{٣}} = \frac{-١}{\sqrt{٣}}$$

بفرض أن $م_٢$ هو ميل المستقيم الذي يصنع زاوية قياسها هـ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

$م_٢$ = ظا هـ   المستقيمان متعامدان

$م_١ \times م_٢ = \left(\frac{-١}{\sqrt{٣}}\right)$ (ظا هـ) = -١   بالضرب × $\frac{\sqrt{٣}}{-١}$

ظا هـ = -١ × $\frac{\sqrt{٣}}{-١}$ = $\sqrt{٣}$ باستخدام الآلة الحاسبة

∴ ق (هـ) = ٦٠°

مثال [٧]

اثبت أن المستقيم الذى معادلته : ٣س + ٢ص = ٤ عمودى على المستقيم الذى معادلته : ٦ص = ٤س +١

∵ ميل المستقيم الأول م$_1$ = $\frac{\text{− معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{-٣}{٢}$

نكتب المستقيم الثاني على الصورة : ٦ص − ٤س =١   ∴ ميل المستقيم الثاني م$_2$ = $\frac{\text{− معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{٤}{٦} = \frac{٢}{٣}$

م$_1$ × م$_2$ = $\frac{-٣}{٢} \times \frac{٢}{٣}$ = −١   المستقيمان متعامدان

مثال [٨]

اثبت أن المثلث أ ب جـ حيث أ(−١،−١) ، ب(٢،٣) ، جـ(٦،٠) قائم الزاوية فى ب

ميل $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ = $\frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1} = \frac{٣-(-١)}{٢-(-١)} = \frac{٣ + ١}{٢ + ١} = \frac{٤}{٣}$

ميل $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ = $\frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1} = \frac{٠ - ٣}{٦ - ٢} = \frac{-٣}{٤}$

م$_1$ × م$_2$ = $\frac{٤}{٣} \times \frac{-٣}{٤}$ = −١   المستقيمان متعامدان   ق(∠ب) = ٩٠°

مثال [٩]

إذا كان المستقيم الذى معادلته : ص = أ س + ٢ عمودى على المستقيم المار بالنقطتين أ(٤ ، ٧) ، ب(−١، ٤) فاوجد قيمة أ

معادلة المستقيم ص = أ س + ٢   ص − أ س − ٢ = ٠

ميل المستقيم الأول = $\frac{\text{− معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{أ}{١}$ = أ

ميل المستقيم الثانى م$_2$ = $\frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1} = \frac{٤ - ٧}{-١ + ٤} = \frac{-٣}{٣}$ = −١   ∵ المستقيمان متعامدان

ميل المستقيم الأول = $\frac{-١}{\text{ميل المستقيم الثانى}}$ ∴ أ = $\frac{-١}{-١}$ = ١

مثال [١٠]

إذا كان المستقيم : م س − ٢ ص + ٣ = ٠ عمودي على المستقيم : ٤س + ص = ٩ اوجد قيمة م ؟

الحل

$م_١ = \frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{-م}{-٢} = \frac{م}{٢}$ $م_٢ = \frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{-٤}{١} = -٤$

المستقيمان متعامدان $م_١ \times م_٢ = -١$

$\frac{م}{٢} \times (-٤) = -١$

$-٢م = -١$ $م = \frac{-١}{-٢}$ $م = \frac{١}{٢}$

إذا كان أ (٢، ٣) ، ب (٤، ٥) ، جـ (−٦ ، −٢) ، د (٢ ، ص) فأوجد قيمة ص التي تجعل

$\overleftrightarrow{أب} \parallel \overleftrightarrow{جـد}$ ، $\overleftrightarrow{أب} \perp \overleftrightarrow{جـد}$

ميل $\overleftrightarrow{أب} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٥ - ٣}{٤ - ٢} = \frac{٢}{٢} = ١$

ميل $\overleftrightarrow{جـد} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{ص + ٢}{٢ + ٦} = \frac{ص + ٢}{٨}$

$\overleftrightarrow{أب} \parallel \overleftrightarrow{جـد}$

ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = ميل $\overleftrightarrow{جـد}$ $\frac{ص + ٢}{٨} = ١$

ص + ٢ = ٨   ص = ٨ − ٢   ص = ٦

$\overleftrightarrow{أب} \perp \overleftrightarrow{جـد}$ ميل $\overleftrightarrow{أب}$ × ميل $\overleftrightarrow{جـد}$ = −١

$\frac{ص + ٢}{٨} \times ١ = -١$

ص + ٢ = −٨   ص = −٨ − ٢   ص = −١٠

مثال [١١]

اثبت أن النقط م(٢ ، -٢) ، ب(٨ ، ٤) ، جـ(٥ ، ٧) ، ء(-١ ، ١) هى رؤوس مستطيل

ميل $\overleftrightarrow{مب}$ = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$ = $\frac{-٢ - ٤}{٢ - ٨}$ = $\frac{-٤}{-٤}$ = ١

ميل $\overleftrightarrow{جـء}$ = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$ = $\frac{٧ - ١}{٥ + ١}$ = $\frac{٦}{٦}$ = ١

ميل $\overline{مب}$ = ميل $\overline{جـء}$ $\overline{مب}$ // $\overline{جـء}$ ....(١)

ميل $\overleftrightarrow{مء}$ = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$ = $\frac{-٢ - ١}{٢ + ١}$ = $\frac{-٣}{٣}$ = -١

ميل $\overleftrightarrow{جـب}$ = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$ = $\frac{٤ - ٧}{٨ - ٥}$ = $\frac{-٣}{٣}$ = -١

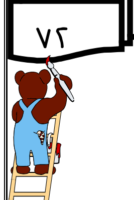
ميل $\overleftrightarrow{مء}$ = ميل $\overleftrightarrow{جـب}$ $\overleftrightarrow{مء}$ // $\overleftrightarrow{جـب}$ ....(١)

من (١) ، (٢) الشكل م ب جـ ء متوازي أضلاع

ميل $\overleftrightarrow{مب}$ × ميل $\overleftrightarrow{جـب}$ = (١) (-١) = -١

$\overleftrightarrow{مب}$ ⊥ $\overleftrightarrow{جـب}$

المستقيمان متعامدان م ب جـ ء مستطيل



تمارين على العلاقة بين ميلى مستقيمين متوازيين

[١] أكمل ما يأتى :

❶ العلاقة بين ميلي مستقيمين متوازيين ....

❷ شرط توازى المستقيمين اللذين ميلاهما $م_1$ ، $م_2$ هو ....

❸ إذا كان المستقيمان اللذان ميليهما $\frac{-٢}{٣}$ ، $\frac{٦}{ك}$ متوازيان فان ك = ...

❹ إذا كان ميلي مستقيمان متوازيان هما م ، ١ − م فان م ....

❺ المستقيمان س = ص + ٢ ، س − ص = ٠ يكونان ....

❻ معادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ، ٠) ويوازى محور السينات ....

❼ معادلة المستقيم المار بالنقطة (−٦ ، −٧) ويوازى محور الصادات ....

❽ إذا كان $\overleftrightarrow{أب}$ // $\overleftrightarrow{جـ ء}$ وكان ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = $\frac{٢}{٣}$ فان ميل $\overleftrightarrow{جـ ء}$ = ...

❾ المستقيم الذى يمر بالنقطة (٢ ، ٤) ويوازى محور السينات تكون معادلته ....

❿ معادلة المستقيم الذى يمر بالنقطة (٥ ، ٩) ويوازى محور الصادات هى ....

[٢] اختر الإجابة الصحيحة

❶ المستقيمان ٢س = ٢ص + ٦ ، ص = س يكونان..........................

(أ) متوازيان　(ب) متعامدان　(جـ) متقاطعان　(د) منطبقان

❷ ميل المستقيم الموازى للمستقيم س = ص يساوى ....

(أ) ١　(ب) س　(جـ) ص　(د) صفر

❸ ميل المستقيم الموازى للمستقيم ٢س + ٣ص = ٥ يساوى ....

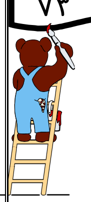
(أ) ٢　(ب) $\frac{٣}{٢}$　(جـ) $-\frac{٣}{٢}$　(د) $-\frac{٢}{٣}$

❹ ميل المستقيم الموازى للمستقيم المار بالنقطتين (٥ ، ١) ، (٢ ، ١) هى.....................

(أ) ٥　(ب) ١　(جـ) −١　(د) صفر

❺ ميل المستقيم الموازى للمستقيم ص− ٣س = ٤ يساوى ....

(أ) ٣　(ب) −٣　(جـ) ٥　(د) ٢



❻ ميل المستقيم الموازى للمستقيم ٣ص − س + ١ = ٠ يساوى

(أ) $\frac{-١}{٣}$ (ب) ٣ (جـ) −٣ (د) $\frac{١}{٣}$

❼ ميل المستقيم الموازى للمستقيم المار بالنقطتين (−١ ، ٥) ، (−١ ، ٤) يساوى ....

(أ) ١ (ب) صفر (جـ) (د) غير معرف

[٣] اثبت أن المستقيم المار بالنقطتين (−٢ ، ٠) ،(١ ، −٣) يوازى المستقيم الذى يصنع زاوية قياسها ١٣٥° مع س⁺

[٤] أوجد ميل المستقيم الذى يوازى المستقيم الذى معادلته : ٢ص +٤ س + ٩ = ٠

[٥] أوجد ميل المستقيم الذى يوازى المستقيم الذى معادلته : ص = س

[٦] أوجد ميل المستقيم الذى يوازى المستقيم المار بالنقطتين (١ ، −٥) ونقطة الأصل

[٧] أوجد ميل المستقيم الذى يوازى المستقيم المار بالنقطة (٤ ، ٧) ويقطع من محور الصادات السالب جزءا طوله ٥ وحدات

[٨] اثبت أن المستقيم ٣ص −٢س = ٥ يوازى المستقيم المار بالنقطتين (٢ ، ٥) ، (−١ ، ٣)

[٩] اثبت أن المستقيم المار بالنقطتين (٣ ، ١) ، (٢ ، ٥) يوازى المستقيم المار بالنقطتين (١ ، ٦) ، (٣ ، −٢)

[١٠] إذا كان المستقيم ٢ص = ٥س − ٧ يوازى المستقيم ٣ص− ك س + ٢ = ٠ فأوجد قيمة ك

[١١] اثبت أن أ (−١ ، −٦) تقع على المستقيم المار بالنقطتين ب (٣ ، −٦) ، جـ (−٥ ، −٦)

[١١] هل النقط أ (٥ ، −١) ، ب (٤ ، ٠) ، جـ (٢ ، ٢) تقع على استقامة واحدة ؟

[١٢] اثبت أن النقط أ (٢ ، −٣) ، ب (٥ ، ٦) ، جـ (٧ ، ١٢) ثلاث نقط تقع على استقامة واحدة

[١٣] إذا كانت أ (−١ ، ٣) ، ب (هـ ، ١) ، جـ (٣ ، −١) على استقامة واحدة أوجد قيمة هـ

[١٤] أوجد قيمة ص (بحيث تكون (٤ ، ٧) ، (٢ ، ١) ، (٣ ، ص) على استقامة واحدة

[١٥] إذا كان المستقيمان ٢ص − ٣س = ٧ ، ص = ك س + ١٠ متوازيان أوجد قيمة ك

[١٦] إذا كان المستقيم ٣س – هـ ص = –٥ يوازى المستقيم ٦ص = ٩س–٧ فأوجد قيمة هـ

[١٧] إذا كان المستقيم المار بالنقطتين (١ ، ٢) ، (–٣ ، ب) يوازى المستقيم ٢س + ب ص + جـ = ٠ فأوجد قيم ب

[١٨] إذا كان المستقيم المار بالنقطتين (٢ ، ص) ، (–٣ ، ٤) يساوى ٢ أوجد قيمة ص ؟

[١٩] إذا كان المستقيم الذى يحوى النقطتين (–٢ ، ١) ، (٢ ، ص) ميله = ٢ . أوجد قيمة ص

وإذا كانت النقطة (س ، ٣) تنتمى الى هذا المستقيم فأوجد قيمة س .

[٢٠] إذا كان ٢(٢ ، ١) ، ب(٣ ، ٢) ، جـ(٤ ، ١) ، ء(٥ ، و)

أوجد قيمة و التى تجعل المستقيم ↔٢ب // المستقيم ↔جـ ء

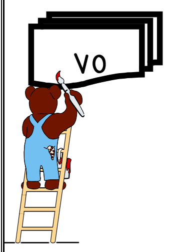
[٢١] اثبت أن النقط ٢(–٢ ، ٥) ، ب(٣ ، ٣) ، جـ(–٤ ، ٢) ، ء(–٩ ، ٤) هى رؤوس لمتوازي الأضلاع ٢ ب جـ ء

[٢٢] إذا كان : ٢(–١ ، ٢) ، ب(٢ ، ٣) ، جـ(–٤ ، ١) ، ء(س ، ٢) أربع نقاط فى مستوى احداثى متعامد

وكان ↔٢ب // ↔جـ ء فأوجد قيمة س

[٢٣] اثبت أن : المستقيم $ل_1$ المار بالنقطتين (١ ، ٥) ،(–٢ ، –١) يوازى المستقيم $ل_2$ المار بالنقطتين : (٠ ، –١) ، (٥ ، ٩) .

[٢٤] إذا كان المستقيم ↔٢ب // محور السينات حيث : ٢(٥ ، –٤) ، ب(–٢ ، ص) فأوجد قيمة ص .



العلاقة بين مستقيمين متعامدين

[١] اكمل مكان النقط

(١) إذا كان ميل مستقيم = $\frac{-٣}{٤}$ فان ميل المستقيم العمودى عليه يساوى.........

(٢) ميل المستقيم العمودى على محور السينات ....

(٣) ميل المستقيم العمودى على محور الصادات ....

(٤) معادلة المستقيم المار بالنقطة (٤ ، ٥) و العمودى على محور الصادات ....

(٥) معادلة المستقيم المار بالنقطة (–٣ ، –١) و العمودى على محور الصادات ....

(٦) معادلة المستقيم المار بالنقطة (–١ ، ٧) و العمودى على محور السينات ....

(٧) معادلة المستقيم المار بالنقطة (–٢ ، –٩) و العمودى على المستقيم الذى معادلته ص = ٣ ....

(٨) معادلة المستقيم المار بالنقطة (١ ، –٣) وعمودى على المستقيم الذى معادلته س = –٣ هى ....

(٩) ميل العمودى على المستقيم الذى معادلته ٨س – ٦ص –١ =٠

(١٠) إذا تعامد مستقيمان ميلاهما م ، م–٢ فان قيمة م = ...

(١١) المستقيم الذى معادلته ٣س–٤ص=٧ ميله هو.................. وميل العمودى عليه يساوى ....

(١٢) إذا كان المستقيمان اللذان ميلا هما $\frac{-٢}{٣}$ ، $\frac{م}{٢}$ متعامدان فان ك = ...

(١٣) المستقيم الذى معادلته ٥س–٢ص + ١١ = ٠ ميله .... ويل العمودى عليه.........

[٢] اختر الإجابة الصحيحة

(١) ميل المستقيم العمودى على المستقيم ص = س يساوى ....

(أ) ١ (ب) –١ (جـ) ص (د) صفر

(٢) ميل المستقيم العمودى على المستقيم ص – ٣س = ٥ يساوى ....

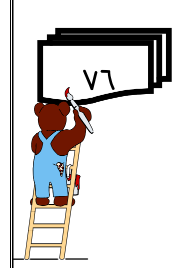
(أ) –٣ (ب) ٣ (جـ) $\frac{-١}{٣}$ (د) ١

(٣) المستقيم الى معادلته ٢س + ٥ = ٢ص يكون ميل العمودى عليه = ...

(أ) $\frac{٥}{٢}$ (ب) $\frac{-٥}{٢}$ (جـ) ١ (د) –١

(٤) ميل المستقيم العمودى على المستقيم المار بالنقطتين (٢ ، ٤) ، (٧ ، ٣) يساوى ....

(أ) ٥ (ب) –٥ (جـ) $\frac{١}{٥}$ (د) $\frac{-١}{٥}$



(٦) أثبت أن المستقيمان الذى معادلتيهما ١٢س + ٩ص = ٧ ، ٣س − ٤ص = ٢ متعامدان

(٧) إذا كان أ(٠ ، ٥) ، ب(٥ ، ٠) ، جـ(٠ ، −٥) فاثبت أن △ أ ب جـ قائم الزاوية

(٨) إذا كان المستقيمان ٩ص − س = ٤ ، ص = ٢ك س متعامدان . أوجد قيمة ك

(٩) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (−١ ، ٢) وعمودى على المستقيم الذى يوازى محور السينات

(١٠) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٠ ، −٣) و عمودى على المستقيم ص = س

(١١) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ، −١) وعمودى على المستقيم المار بالنقطتين أ(−٣ ، ٥) ، ب(٤ ، −٢) .

(١٢) △ أ ب جـ فيه أ(٣ ، −١) ، ب(٢ ، ٥) ، جـ(٠ ، ٤) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة ب ويكون عموديا على المستقيم أ جـ

(١٣) إذا كانت س(٥ ، ١) ، ص(٦ ، ٤) ، ع(٠ ، ٦) فاثبت أن : $\overleftrightarrow{سص} \perp \overleftrightarrow{صع}$

(١٤) إذا كانت أ(٥ ، ٧) ، ب(٠ ، ٢) ، جـ(٣ ، ٤) ، ء(−١ ، ٨) فاثبت أن : $\overline{أب} \perp \overline{جـء}$

(١٥) اثبت أن المستقيم المار بالنقطتين (٦ ، ١٠) ، (٧ ، ٩) عمودى على المستقيم المار بالنقطتين (١ ، ١) ، (٢ ، ٢)

(١٦) اثبت أن المستقيم المار بالنقطتين (٠ ، ٥) ، (٠ ، −٥) عمودى على المستقيم المار بالنقطتين (٥ ، ٠) ، (−٥ ، ٠)

(١٧) هل △ أ ب جـ الذى رؤوسه أ(٣ ، ٢) ، ب(٥ ، ٤) ، جـ(−١ ، ٣) قائم الزاوية ؟

(١٨) اثبت أن △ أ ب جـ قائم الزاوية أ(٢ ، −٢) ، ب(٧ ، −١) ، جـ(٣ ، −٧)

(١٩) اثبت أن الشكل أ ب جـ ء مستطيل ، أ(٣ ، ٢) ، ب(−٢ ، ٢) ، جـ(−٢ ، −١) ، ء(٣ ، −١)

(٢٠) إذا كان المستقيمان $ل_١$: ٩ص − س = ٤ ، $ل_٢$: ص = ٢م س متعامدان احسب قيمة م .

(٢١) إذا كان $ل_١$: ٢س + ص + ٤ = ٠ ، $ل_٢$: هـ س −٢ص + ٥ = ٠

أوجد قيمة هـ التى تجعل

(أ) $ل_١ \perp ل_٢$ (ب) $ل_١ \parallel ل_٢$

(٢٢) إذا كان $ل_١$: ٢س + هـ ص −٣ = ٠ ، $ل_٢$: ٤ س + ٣ص + ٩ = ٠ أوجد قيمة هـ التى تجعل

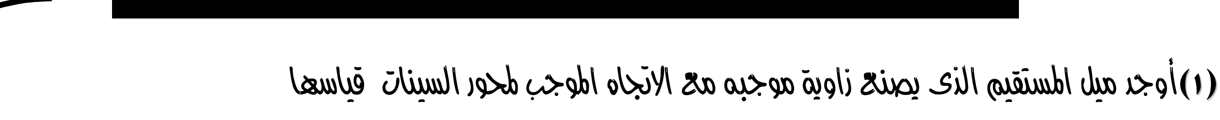
(أ) $ل_١ \perp ل_٢$ (ب) $ل_١ \parallel ل_٢$

(٢٣) إذا كان المستقيم ص −٣س + ١ = ٠ عمودى على المستقيم المار بالنقطتين (−٤ ، ٥) ، (أ ، ٢) فأوجد قيمة أ

(٢٤) △ أ ب جـ فيه أ ∈ محور السينات ، ب(٢ ، ١) ، جـ(−١ ، ٤)

(٢٥) ، رسم المستقيم $\overleftrightarrow{أء} \perp$ المستقيم $\overleftrightarrow{بجـ}$ عند ء(٥ ، −٢) أوجد احداثى نقطة أ

(٢٦) أوجد الشرط اللازم لكى يتعامد المستقيمان ص = (٢ − أ) س + ٣ ، ص = ب س −٢



(١) أوجد ميل المستقيم الذى يصنع زاوية موجبه مع الاتجاه الموجب لمحور السينات قياسها

(أ) ٤٥° (ب) ١٥° ٢٤َ ١٢ً (ج) ٣٦° (د) ١٥٠°

(٢) أوجد قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات اذا كان ميل المستقيم

(أ) ٢,٣٦٥ (ب) ١,١٨٧ (ج) $\frac{٤}{٥}$

(٣) أوجد قياس الزاوية الموجبة (هـ) التى يصنعها المستقيم ل مع الاتجاه الموجب لمحور السينات اذا كان المستقيم ل يمر بالنقطتين

(أ) (١ ، ٤) ، (٣ ، ٦) (ب) (−٤ ، −٣) ، (٠ ، −١)

(ج) (−٢ ، √٣) ، (١ ، ٤√٣) (د) (٢√٣ ، ٣) ، (٣√٣ ، ٤)

العلاقة بين ميلى مستقيمين متوازيين

(٤) اثبت أن المستقيم المار بالنقطتين (−٢ ، ٠) ، (١ ، −٣) يوازى المستقيم الذى يصنع زاوية قياسها ١٣٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

(٥) اذا كان : أ(−١ ، ٢) ، ب(٢ ، ٣) ، جـ(−٤ ، ١) ، ء(س ، ٢) أربع نقاط فى مستوى احداثى متعامد وكان $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{جـء}}$ فأوجد قيمة س

(٦) أثبت أن : المستقيم ل١ المار بالنقطتين (١ ، ٥) ،(−٢ ، −١) يوازى المستقيم ل٢ المار بالنقطتين : (٠ ، −١) ، (٥ ، ٩) .

(٧) اذا كان المستقيم $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ // محور السينات حيث : أ(٥ ، −٤) ، ب(−٢ ، ص) فأوجد قيمة ص .

(٨) فى المستوى الاحداثى المتعامد اثبت أن النقط : أ(−١ ، ٦) ، ب(٣ ، −٤) ، جـ(٢ ، $\frac{-٣}{٢}$) تقع على استقامة واحدة .

العلاقة بين ميلى مستقيمين متعامدين

(١) أثبت أن : المستقيم ل١ المار بالنقطتين(−١ ، ٤) ، (٣ ، ٧) ، المستقيم ل٢ المار بالنقطتين : (١ ، ١) ، (٤ ، −٣) متعامدان

(٢) فى المستوى الاحداثى المتعامد اثبت أن النقط : ⅊ (١ ، ٧) ، ب(٢ ، ٤) ، جـ(٥ ، ص)

تمثل رؤوس مثلث قائم الزاوية فى ب فأوجد قيمة ص .

(٣) إذا كان : ⅊(−٢ ، ٥) ، ب(١ ، ٢) ، جـ(٣ ، ٤) ثلاث نقاط فى مستوى احداثى متعامد . اثبت أن $\overleftrightarrow{⅊ب} \perp \overleftrightarrow{جـ ب}$

(٤) اثبت أن المستقيم المار بالنقطتين (٧ ، −١) ، (٥ ، −٣) عمودى على المستقيم الذى يصنع زاوية قياسها ٤٥ ° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

(٥) على مستوى احداثى متعامد مثل النقط : ⅊(٣ ، −٢) ، ب(−٥ ، ٠) ، جـ(٠ ، −٧) ، ء(٨ ، −٩)

ثم اثبت أن : الشكل ⅊ ب جـ ء متوازى أضلاع .

(٦) مثل النقط : ⅊(٢ ، −٢)، ب(٨ ، ٤)، جـ(٥ ، ٧)، ء(−١ ، ١) اثبت أن : الشكل ⅊ ب جـ ء مستطيل .

(٧) مثل النقط : ⅊(−٣ ، −٣) ، ب(٣ ، ١) ، جـ(١ ، ٥) ، ء(−٢ ، ٣) اثبت أن : الشكل ⅊ ب جـ ء شبه منحرف .

(٨) أكمل ما يأتى :

(١) شرط تعامد مستقيمين ميلاهما $م_١$ ، $م_٢$ هو ....

(٢) شرط تعامد مستقيمين ميلاهما $م_١$ ، $م_٢$ هو ....

(٣) ميل المستقيم المار بالنقطتين (−١ ، −١) ، (٦ ، ٠) يساوى ....

(٤) اذا كان : $\overleftrightarrow{⅊ب} \perp \overleftrightarrow{جـ ء}$ وكان ميل $\overleftrightarrow{⅊ب} = \frac{-١}{٧}$ فان : ميل $\overleftrightarrow{جـ ء}$ يساوى ....

(٥) ميل المستقيم الموازى للمستقيم المار بالنقطتين (٠ ، ٥) ، (−٦ ، ٤) يساوى ....

(٦) إذا كان △ ⅊ ب جـ قائم الزاوية فى ب فان ميل $\overleftrightarrow{⅊ب}$ × ميل $\overleftrightarrow{جـ ب}$ = ...

(٧) إذا كان ⅊ ب جـ ء معين فان ميل $\overleftrightarrow{⅊جـ}$ × ميل $\overleftrightarrow{ب ء}$ = ...

(٨) إذا كان ⅊ ب جـ ء مستطيل فان ميل $\overleftrightarrow{⅊ب}$ × ميل $\overleftrightarrow{⅊ء}$ = ...

(٩) ميل المستقيم الذى يصنع زاوية قياسها ٣٠ ° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات = ...

(١٠) ميل المستقيم الذى يصنع زاوية قياسها ١٢٠° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات = ...

(١١) إذا كان ميلا مستقيمين متساويين فى المقدار فان المستقيمين يكونان ....

(١٢) إذا كان ميل المستقيم المار بالنقطتين (−١ ، ٤) ، (٢ ، ص) يساوى $\frac{٦}{٧}$ فان ص = ...

(١٣) إذا كانت : أ(−١ ، ٣) ، ب(٧ ، −٢) فان ميل المستقيم العمودى على $\overleftrightarrow{أب}$ = ...

(١٤) ميل المستقيم العمودى على محور الصادات يساوى ....

(١٥) إذا كان المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ يوازى محور السينات حيث : أ(٣ ، ٣) ، ب(−٤ ، ك) فان ك = ...

(١٦) إذا كان المستقيم $\overleftrightarrow{جء}$ يوازى محور الصادات حيث : جـ(م ، ٤) ، ء(−٥ ، ٧) فان م = ...

(١٧) إذا كان : ١ ، $\frac{أ}{٣}$ ميلى مستقيمان متعامدان فان أ = ...

(١٨) △ أ ب جـ قائم الزاوية فى ب فيه : أ(١ ، ٤) ، ب(−١ ، −٢) فان ميل $\overleftrightarrow{بج}$ يساوى ....

(١٩) إذا كان : أ ب جـ ء مربع قطراه $\overline{أج}$ ، $\overline{بء}$ حيث : أ(٣ ، ٥) ، جـ(٥ ، −١) فان ميل $\overleftrightarrow{بء}$ = ...

(٢٠) إذا كان المستقيم المار بالنقطتين (أ ، ٠) ، (٠ ، ٣) و المستقيم الذى يصنع زاوية قياسها ٣٠° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات متعامدان فان أ = ...

(٢١) إذا كان أ ب جـ ء مستطيل فيه أ(−٢ ، ٣) ، ء(−١ ، ٥) فان :

اولا : ميل $\overleftrightarrow{بج}$ = ... ، ميل أ + ب = ... ميل $\overleftrightarrow{جء}$ = ...

(٩) اختر الإجابة الصحيحة

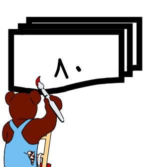
(أ) إذا كان : م١ ، م٢ ميلى مستقيمين متعامدين فان : ....

(أ) م١ = م٢ (ب) م١ = −م٢ (جـ) م١ م٢ = −١ (د) م١ م٢ = ١

(ب) إذا كان : م١ ، م٢ ميلى مستقيمين متوازيين فان : ....

(أ) م١ − م٢ = ٠ (ب) م١ + م٢ = ٠ (جـ) م١ م٢ = ٠ (د) م١ − م٢ ≠ ٠

(ج) المستقيم الما بالنقطتين (١ ، −٢) ونقطة الأصل يوازى المستقيم الذى ميلة



(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{-١}{٢}$ (جـ) −٢ (د) ٢

(د) المستقيم المار بالنقطتين (١ ، −١) ، (٢ ، ٠) يوازى المستقيم الذى يصنع زاوية موجبة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات قياسها .... °

(أ) ٤٥ (ب) ١٣٥ (جـ) ٩٠ (د) ٣٠

(هـ) إذا كان : أ ب جـ ء متوازى الأضلاع فان : ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = ...

(أ) ميل $\overleftrightarrow{بجـ}$ (ب) ميل $\overleftrightarrow{جـء}$ (جـ) ميل $\overleftrightarrow{أء}$ (د) ميل $\overleftrightarrow{أجـ}$

(و) المستقيمان اللذان ميليهما $\frac{٣}{٥}$ ، $\frac{-٥}{٣}$ يكونان ....

(أ) متوازيان (ب) متعامدان (جـ) منطبقان (د) غير متعامدان

(ز) إذا كان المستقيم ل عمودى على المستقيم المار بالنقطتين (−١ ، ٢) ، (٠ ، ٥) فان ميل المستقيم ل = ...

(أ) ٣ (ب) −٣ (جـ) $\frac{١}{٣}$ (د) $\frac{-١}{٣}$

(١٠) اثبت أن المستقيم المار بالنقطتين : (٢ ، −١) ، (٦ ، ٣) يوازى المستقيم الذى يصنع زاوية قياسها ٤٥ ° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات .

(١١) اثبت أن المستقيم المار بالنقطتين : (−١ ، −٧) ، (٢ ، − ٤) عمودى على المستقيم الذى يصنع زاوية قياسها ١٣٥ ° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات .

(١٢) اثبت أن المستقيم المار بالنقطتين : (٦ ، ٤$\sqrt{٣}$) ، (٧ ، ٥$\sqrt{٣}$) يوازى المستقيم الذى يصنع زاوية قياسها ٦٠ ° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات .

(١٣) إذا كان المستقيم المار بالنقطتين : (س ، ٥) ، (١ ، ٢) عموديا على المستقيم المار بالنقطين : (٠ ، ١) ، (٣ ، −٤) فأوجد قيمة س

(١٤) إذا كان المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ // محور الصادات ، حيث : أ(س ، ٧) ، ب(٣ ، ٥) فأوجد قيمة س

(١٥) إذا كان المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ // محور السينات ، حيث : أ (٤ ، ٢) ، ب (-٥ ، ص) فأوجد قيمة ص

(١٦) باستخدام الآلة الحاسبة أوجد قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المستقيم الذى ميله م مع الاتجاه الموجب لمحور السينات فى الحالات التالية :

(أ) م = ٠,٣　　(ب) م = ٠,٣٦٣٧　　(جـ) م = $\sqrt{٣}$　　(د) م = ١,٠٢٤٦

(١٧) إذا كان المستقيم ل$_١$ يمر بالنقطتين (٣ ، ١) ، (٢ ، ك) و المستقيم ل$_٢$ يصنع زاوية قياسها ٤٥ ° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات فأوجد قيمة ك إذا كان المستقيمان ل$_١$ ، ل$_٢$

(أ) متوازيان　　(ب) متعامدان

(١٨) اذا كان المستقيم ل$_١$ يمر بالنقطتين (١ ، ٤) ، (ك -٢ ، ك) و المستقيم ل$_٢$ يصنع زاوية قياسها ١٣٥ ° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات فأوجد قيمة ك اذا كان المستقيمان ل$_١$ ، ل$_٢$:　(أ) متوازيان　(ب) متعامدان

(١٩) أوجد قياس الزاوية التى يصنعها المستقيم ل مع الاتجاه الموجب لمحور السينات و الذى يمر بالنقطتين : ($\sqrt{٣}$ ، ١) ، ($٢\sqrt{٣}$ ، ٢)

(٢٠) أوجد قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المستقيم ل مع الاتجاه الموجب لمحور السينات و الذى يمر بالنقطتين : (-٢ ، ٩) ، (-٧ ، ٤)

(٢١) أوجد قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المستقيم ل مع الاتجاه الموجب لمحور السينات و الذى يوازى المستقيم المار بالنقطتين (-١ ، ٠) (٠ ، ١)

(٢٢) أوجد قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المستقيم ل مع الاتجاه الموجب لمحور السينات اذا كان ل عمودى على المستقيم المار بالنقطتين (-٣ ، ٦) (٥ ، -٢)

(٢٣) إذا كان المستقيم المار بالنقطتين (٢ ، ص) ، (٣ ، -٢) يوازى المستقيم المار بالنقطتين (٠ ، ١) (س ، ٥) فأوجد العلاقة بين س ، ص

(٢٤) إذا كان المستقيم المار بالنقطتين (س ، ص) ، (-١ ، ٠) عمودى على المستقيم المار بالنقطتين : (٣ ، ٢) (٠ ، -١) فأوجد العلاقة بين س ، ص

(٢٥) ا ب جـ ء شبه منحرف فيه : $\overline{أب}$ // $\overline{جـ ء}$ ، أ(٩ ، -٢) ، ب(٣ ، ٢) ، جـ(س ، - س)

، ء(٤ ، -٣) أوجد احداثى نقطة جـ .

(٢٦) اثبت أن النقط : أ(٤ ، ٣) ، ب(٧ ، ٠) ، جـ(١ ، -٢) هى رؤوس مثلث وإذا كانت نقطة ء(١ ، ٢) فاثبت أن الشكل أ ب جـ ء شبه منحرف و أوجد النسبة بين أ ء ، ب جـ

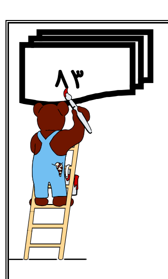
(٢٧) إذا كان النقط : أ(١ ، ١) ، ب(٣ ، ٣) ، جـ(٠ ، -٣س) ، ء(س ، ص) هى رؤوس المستطيل أ ب جـ ء فأوجد قيمة كل من : س ، ص

(٢٨) أوجد ميل المستقيم الذى يصنع زاوية موجبة جيب تمامها $\frac{٣}{٥}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

(٢٩) أوجد ميل الخط المستقيم الذى يصنع زاوية موجبة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات قياسها

(أ) ٤٤° (ب) ٩٠° (جـ) ٣٠°

(د) ١٢° (هـ) ١٧َ ٧٤° (م) ١٣٥°



الدرس الخامس

معادلة الخط المستقيم

معادلة الخط المستقيم

❶ معادلة المستقيم ص = م س + جـ معادلة مستقيم ميله م ويقطع من محور الصادات جزء قدرة جـ

❷ معادلة مستقيم يمر بنقطة الأصل ص = م س

❸ معادلة مستقيم يوازي محور س ص = ب (يقطع الصادات في ب)

❹ معادلة مستقيم يوازي محور ص س = جـ (يقطع السينات في جـ)

مثال [١]

معادلة المستقيم الذي ميله — ٩ و يمر بنقطة الأصل

ص = م س ∴ المعادلة المطلوبة هي : ص = — ٩ س

مثال [٢]

معادلة المستقيم الذي يوازي محور السينات و يمر بالنقطة (— ٣ ، ٥)

ص = ب ∴ المعادلة المطلوبة هي : ص = ٥

مثال [٣]

معادلة المستقيم الذي يوازي محور الصادات و يمر بالنقطة (— ٣ ، ٥)

س = جـ ∴ المعادلة المطلوبة هي : س = — ٣

مثال [٤]

معادلة المستقيم الذي ميله ٤ و يمر بالنقطة (— ١ ، ٥)

بالتعويض في الصورة العامة لمعادلة المستقيم بالميل والنقطة و هي : ص = م س + جـ

٤ (— ١) + جـ = ٥ ⇐ — ٤ + جـ = ٥

⇐ جـ = ٥ + ٤ ⇐ جـ = ٩

∴ المعادلة المطلوبة هي : ص = ٤ س + ٩

مثال [٥]

معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة (— ٢ $\sqrt{3}$ ، ٧) ويصنع زاوية قياسها ٦٠° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

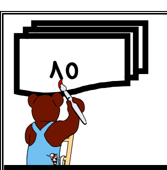
م = ظا هـ = ظا ٦٠° = $\sqrt{3}$

بالتعويض في الصورة العامة لمعادلة المستقيم بالميل والنقطة و هي : ص = م س + جـ

∴ $\sqrt{3}$ (— ٢ $\sqrt{3}$) + جـ = ٧ ⇐ — ٢ × ٣ + جـ = ٧

⇐ — ٦ + جـ = ٧ ∴ جـ = ١٣

∴ المعادلة المطلوبة هي : ص = ٤ س + ١٣



✍ **مثال [٦]**

أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين (−٣ ، ٢) ، (٠ ، ٧)

∴ ميل الخط المستقيم م = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$ = $\frac{٧ - ٢}{٠ + ٣}$ = $\frac{٥}{٣}$

بالتعويض في الصورة العامة لمعادلة المستقيم بالميل و إحدى النقطتين : فى المعادلة ص = م س + جـ

∴ ص = $\frac{٥}{٣}$ س + جـ ∴ $\frac{٥}{٣}$ (٠) + جـ = ٧ ∴ جـ = ٧

∴ المعادلة المطلوبة هي ص = $\frac{٥}{٣}$ س + ٧ ∴ ٣ص = ٥ س + ٢١

✍ **مثال [٧]**

معادلة المستقيم المار بالنقطتين (١ , ٣) , (٤ , ٦)

الميل = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$ = $\frac{٦ - ٣}{٤ - ١}$ = ١ بالتعويض في الصورة العامة لمعادلة المستقيم بالميل و إحدى النقطتين :

٦ = ١ × ٤ + ب ⇐ ٦ = ٤ + جـ

⇐ جـ = ٦ − ٤ = ٢ ∴ المعادلة المطلوبة هي : ص = س + ٢

✍ **مثال [٨]**

أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (−٢ ، ١) و يوازي المستقيم ٣ ص − ٢ س + ٧ = صفر

ميل الخط المستقيم المعلوم م = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$ = $\frac{-(-٢)}{٣}$ = $\frac{٢}{٣}$

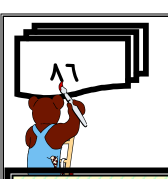
بالتعويض في الصورة العامة لمعادلة المستقيم بالميل و النقطة التى يمر بها المستقيم فى المعادلة ص = م س + جـ

∴ ص = $\frac{٢}{٣}$ س + جـ ⇐ ∴ $\frac{٢}{٣}$ (−٢) + جـ = ١ ⇐ ∴ $\frac{-٤}{٣}$ + جـ = ١

بالضرب × ٣ للطرفين

⇐ −٤ + ٣ جـ = ٣ ⇐ ٣ جـ = ٣ + ٤ ⇐ ٣ جـ = ٧ ∴ جـ = $\frac{٧}{٣}$

∴ المعادلة المطلوبة هي ⇐ ص = $\frac{٢}{٣}$ س + $\frac{٧}{٣}$ ⇐ ٣ص = ٢س + ٧



✍ **مثال [٩]**

أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (− ٣ ، − ٥) عموديا على المستقيم س + ٣ ص = ١١

ميل الخط المستقيم المعلوم = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$ = $\frac{-١}{٣}$

ميل الخط المستقيم المطلوب م = ميل المستقيم العمودي على المستقيم المعلوم = ٣

بالتعويض في الصورة العامة لمعادلة المستقيم بالميل و النقطة التي يمر بها المستقيم في المعادلة ص = م س + جـ

ص = ٣ س + جـ ⇐ ٣ (− ٣) + جـ = − ٥

⇐ − ٩ + جـ = − ٥ ⇐ جـ = − ٥ + ٩ ⇐ جـ = ٤

∴ المعادلة المطلوبة هي ⇐ ص = ٣ س + ٤ ⇐ ص − ٣س − ٤ = ٠

✍ **مثال [١٠]**

أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٣ ، ١)ويصنع زاوية قياسها ٤٥° مع الاتجاة الموجب لمحور السينات

ميل الخط المستقيم م = طا هـ = طا ٤٥° = ١

بالتعويض في الصورة العامة لمعادلة المستقيم بالميل و النقطة التي يمر بها المستقيم في المعادلة ص = م س + جـ

ص = (١) س + جـ ⇐ (١)(٣) + جـ = ١

⇐ ٣ + جـ = ١ ⇐ جـ = ١ − ٣ ⇐ جـ = − ٢

∴ المعادلة المطلوبة هي ⇐ ص = س − ٢ ⇐ ص − س + ٢ = ٠

✍ **مثال [١١]**

أوجد معادلة المستقيم الذى ميله $\frac{-٤}{٥}$ **ويقطع من محور الصادات الموجب جزءا قدرة** ٥ وحدات

المستقيم يقطع من محور الصادات الموجب جزءا قدرة ٥ وحدات

المستقيم يمر بالنقطة (٠ ، ٥) أو جـ = ٥

∴ المعادلة المطلوبة هي ⇐ ص = $\frac{-٤}{٥}$ س + ٥ ⇐ ٥ص = −٤س + ٢٥

✍ **مثال [١٢]**

أوجد معادلة المستقيم الذى ميله $\frac{-١}{٤}$ ويقطع من محور الصادات السالب جزءا قدرة وحدة واحدة

المستقيم يقطع من محور الصادات الموجب جزءا قدرة ٥ وحدات

المستقيم يمر بالنقطة (٠ ، −١) أو جـ = −١

∴ المعادلة المطلوبة هي ⇐ ص = $\frac{-١}{٤}$ س − ١ ⇐ ٤ص = − س − ٤

✍ **مثال [١٣]**

أوجد معادلة المستقيم الذى ميله −٦ ويقطع من محور السينات السالب جزءا قدرة ٢وحدة

المستقيم يقطع من محور السينات السالب جزءا قدرة ٢ وحدات ∴ المستقيم يمر بالنقطة (−٢ ، ٠)

بالتعويض في الصورة العامة لمعادلة المستقيم بالميل و النقطة التى يمر بها المستقيم فى المعادلة ص = م س + جـ

ص = −٦ س + جـ ⇐ −٦ (−٢) + جـ = ٠

⇐ ١٢ + جـ = ٠ ⇐ جـ = −١٢

∴ المعادلة المطلوبة هي ⇐ ص = −٦ س −١٢ ⇐ ص + ٦س + ١٢ = ٠

✍ **مثال [١٤]**

أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (١ ، ٧) و يوازى المستقيم المار بالنقطتين (١ ،٢) ، (٣ ، −٢) .

ميل الخط المستقيم م = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$ = $\frac{-٢ -٢}{٣ - ١}$ = $\frac{-٤}{٢}$ = −٢

بالتعويض في الصورة العامة لمعادلة المستقيم بالميل و إحدى النقطتين : فى المعادلة ص = م س + جـ

ص = −٢ س + جـ ∴ −٢ (١) + جـ = ٧

⇐ ∴ −٢ + جـ = ٧ ∴ جـ = ٢ + ٧ ∴ جـ = ٩

∴ المعادلة المطلوبة هي ص = −٢ س + ٩ ∴ ص + ٢س − ٩ = ٠

✍ مثال [١٥]

أوجد معادلة المستقيم الذى ميله يساوى ميل المستقيم $\frac{ص - ١}{س} = \frac{١}{٣}$ **ويقطع جزءا سالبا من محور الصادات قدره** ٣ وحدات

$\frac{ص - ١}{س} = \frac{١}{٣}$ ٣ص − ٣ = س   ٣ص − س − ٣ = ٠

ميل الخط المستقيم المعلوم م = $\frac{- \text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{-(-١)}{٣} = \frac{١}{٣}$

المستقيم يقطع جزءا سالبا من محور الصادات قدره ٣ وحدات   يمر بالنقطة (٠ ، −٣)

أو أن   جـ = −٣

بالتعويض في الصورة العامة لمعادلة المستقيم بالميل و النقطة التى يمر بها المستقيم فى المعادلة ص = م س + جـ

ص = $\frac{١}{٣}$ س + جـ   ⇐ $\frac{١}{٣}$ (٠) + جـ = −٣

⇐ ٠ + جـ = −٣   ⇐ جـ = −٣

∴ المعادلة المطلوبة هي ⇐ ص = $\frac{١}{٣}$ س − ٣   ⇐   ٣ص = س − ٩

✍ مثال [١٦]

أوجد معادلة المستقيم الذى يقطع من محور السينات جزءا موجبا طوله ٢ وحدة طول **ويكون عموديا على المستقيم الذى معادلته :** ٣س − ٨ = ٣ص

المعادلة المعلومة ٣س − ٨ = ٣ص   ٣س − ٣ص − ٨ = ٠

ميل الخط المستقيم المعلوم = $\frac{- \text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{-٣}{-٣} = ١$

ميل الخط المستقيم المطلوب   م = ميل المستقيم العمودى على المستقيم المعلوم = −١

المستقيم يقطع من محور السينات الموجب جزءا قدرة ٢ وحدات

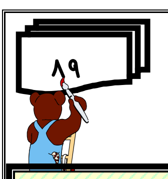
المستقيم يمر بالنقطة (٢ ، ٠)

بالتعويض في الصورة العامة لمعادلة المستقيم بالميل و النقطة التى يمر بها المستقيم فى المعادلة ص = م س + جـ

ص = − س + جـ   ⇐   − (٢) + جـ = ٠

⇐ − ٢ + جـ = ٠   ⇐ جـ = ٢

∴ المعادلة المطلوبة هي ⇐ ص = − س + ٢   ⇐   ص + س − ٢ = ٠



✍ **مثال [١٧]**

أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين التاليتين (−١ ، ٥) ، (٤ ، ١) ثم أوجد قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات .

ميل الخط المستقيم م = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{١ - ٥}{٤ + ١} = \frac{-٤}{٥}$

بالتعويض في الصورة العامة لمعادلة المستقيم بالميل و إحدى النقطتين : فى المعادلة ص = م س + جـ

ص = $\frac{-٤}{٥}$ س + جـ   ∴ $\frac{-٤}{٥}$ (−١) + جـ = ٥

⇐ ∴ $\frac{٤}{٥}$ + جـ = ٥   بالضرب × ٥ لطرفين   ∴ ٤ + ٥ جـ = ٢٥

∴ ٥ جـ = ٢٥ − ٤   ∴ ٥ جـ = ٢١   ∴ جـ = $\frac{٢١}{٥}$

∴ المعادلة المطلوبة هي ص = $\frac{-٤}{٥}$ س + $\frac{٢١}{٥}$ ∴ ٥ص = −٤ س + ٢١

∴ ٥ص + ٤س − ٢١ = ٠

قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات = ظا هـ = $\frac{-٤}{٥}$

∵ الميل سالب ∴ الزاوية منفرجة باستخدام الآلة الحاسبة قياس الزاوية الحادة = ٣٥″ ٣٩′ ٣٨° ∴

ق (هـ) = ٢٥″ ٢٠′ ١٤١°

✍ **مثال [١٨]**

أوجد معادلة المستقيم المار بمنتصف $\overline{أب}$ حيث أ = (١ ، ٦) ، ب (−٥ ، −٤) ويوازى المستقيم الذى معادلته ٣س − ص = ٧

منتصف $\overline{أب}$ = ($\frac{س_١ + س_٢}{٢}$ ، $\frac{ص_١ + ص_٢}{٢}$) = ($\frac{١ - ٥}{٢}$ ، $\frac{٦ - ٤}{٢}$) = ($\frac{-٤}{٢}$ ، $\frac{٢}{٢}$) = (−٢ ، ١)

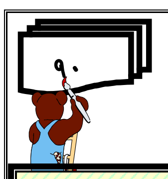
ميل الخط المستقيم المعلوم = $\frac{- \text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{-٣}{-١}$ = ٣

بالتعويض في الصورة العامة لمعادلة المستقيم بالميل و النقطة التى يمر بها المستقيم فى المعادلة ص = م س + جـ

ص = ٣ س + جـ   ⇐ ٣ (−٢) + جـ = ١

⇐ −٦ + جـ = ١   ⇐ جـ = ١ + ٦   ⇐ جـ = ٧

∴ المعادلة المطلوبة هي ⇐ ص = ٣ س + ٧   ⇐ ص −٣ س −٧ = ٠



✍ **مثال [١٩]**

أوجد معادلة محور تماثل $\overline{أب}$ حيث أ = (١ ، ٦) ، ب (−٥ ، −٤)

محور التماثل هو المستقيم العمودى على القطعة المستقيمة من منتصفها

منتصف $\overline{أب}$ = $\left(\frac{س_١ + س_٢}{٢} ، \frac{ص_١ + ص_٢}{٢} \right) = \left(\frac{١ - ٥}{٢} ، \frac{٦ - ٤}{٢} \right) = \left(\frac{-٤}{٢} ، \frac{٢}{٢} \right) = (-٢ ، ١)$

ميل الخط المستقيم المعلوم = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{-٤ - ٦}{-٥ - ١} = \frac{-١٠}{-٦} = \frac{٥}{٣}$

ميل المستقيم العمودى على المستقيم المعلوم = ميل المحور = $\frac{-٣}{٥}$

بالتعويض في الصورة العامة لمعادلة المستقيم بالميل و النقطة التى يمر بها المستقيم فى المعادلة ص = م س + جـ

ص = $\frac{-٣}{٥}$ س + جـ ⇐ $\frac{-٣}{٥}$ (−٢) + جـ = ١

⇐ $\frac{٦}{٥}$ + جـ = ١ ⇐ ٦ + ٥جـ = ٥ ⇐ ٥جـ = ٥ − ٦ ⇐ جـ = $\frac{-١}{٥}$

∴ المعادلة المطلوبة هي ⇐ ص = $\frac{-٣}{٥}$ س + $\frac{-١}{٥}$ ⇐ ٥ص = −٣س − ١

٣ص + س − ١ = ٠

✍ **مثال [٢٠]**

△ أ ب جـ فيه أ (١ ، ٢) ، ب (٥ ، −٢) ، جـ (٣ ، ٤) ، ء منتصف $\overline{أب}$ ، رسم $\overline{ءهـ}$ // $\overline{بجـ}$
أوجد معادلة $\overleftrightarrow{ءهـ}$

∴ احداثى منتصف $\overline{أب}$ = $\left(\frac{س_١ + س_٢}{٢} ، \frac{ص_١ + ص_٢}{٢} \right) = \left(\frac{١ + ٥}{٢} ، \frac{٢ - ٢}{٢} \right) = \left(\frac{٦}{٢} ، \frac{صفر}{٢} \right) = (٣ ، ٠)$

$\overline{ءهـ}$ // $\overline{بجـ}$ ميل $\overline{ءهـ}$ = ميل $\overline{بجـ}$

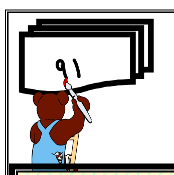
∴ ميل $\overleftrightarrow{ءهـ}$ = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٤ + ٢}{٣ - ٥} = \frac{٦}{-٢} = -٣$

بالتعويض في الصورة العامة لمعادلة المستقيم بالميل و النقطة التى يمر بها المستقيم فى المعادلة ص = م س + جـ

∴ ص = −٣ س + جـ ⇐ −٣ (٣) + جـ = صفر

⇐ −٩ + جـ = صفر ⇐ جـ = ٩

∴ المعادلة المطلوبة هي ⇐ ص = −٣ س + ٩ ⇐ ص + ٣ س − ٩ = ٠



✍ **مثال [٢١]**

△ ا ب جـ فيه ا(٢ ، ٥)، ب(٢ ، –٤)، جـ(٦ ، ٠)، $\overline{\text{ا ء}}$ متوسط △ ا ب جـ

أوجد معادلة المستقيم المار بالمتوسط $\overline{\text{ا ء}}$

$\overline{\text{ا ء}}$ متوسط ء منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$

∴ احداثي منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$ = $\left(\frac{س_1 + س_2}{2} ، \frac{ص_1 + ص_2}{2}\right)$ = $\left(\frac{2 + 6}{2} ، \frac{-4 + 0}{2}\right)$ = $\left(\frac{8}{2} ، \frac{-4}{2}\right)$ = (٤ ، –٢)

ميل المستقيم المار بالمتوسط $\overline{\text{ا ء}}$ يمر بالنقطتين ا(٢ ، ٥) ، ء(٤ ، –٢)

∴ ميل $\overleftrightarrow{\text{ا ء}}$ = $\frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$ = $\frac{-2 - 5}{4 - 2}$ = $\frac{-7}{2}$

بالتعويض في الصورة العامة لمعادلة المستقيم بالميل و النقطة التي يمر بها المستقيم في المعادلة ص = م س + جـ

∴ ص = $-\frac{7}{2}$ س + جـ ⇐ $-\frac{7}{2}$ (٤) + جـ = –٢

⇐ –١٤ + جـ = –٢ ⇐ جـ = –٢ + ١٤ = ١٢

∴ المعادلة المطلوبة هي ⇐ ص = $-\frac{7}{2}$ س + ١٢ ⇐ ٢ص = –٧ س + ٢٤ ⇐ ٢ص + ٧ س – ٢٤ = ٠

✍ **مثال [٢٢]**

إذا كان ا ب جـ ء معين تقاطع قطراه $\overline{\text{ا جـ}}$ ، $\overline{\text{ب ء}}$ في نقطة م حيث ب(٢ ، ٥) ، ء(٤ ، –١)

أوجد معادلة $\overleftrightarrow{\text{ا جـ}}$

ا ب جـ ء معين القطران $\overline{\text{ا جـ}}$ ، $\overline{\text{ب ء}}$ متعامدان وينصف كلا منهما الآخر

م = احداثي منتصف $\overline{\text{ب ء}}$ = $\left(\frac{س_1 + س_2}{2} ، \frac{ص_1 + ص_2}{2}\right)$ = $\left(\frac{2 + 4}{2} ، \frac{5 - 1}{2}\right)$ = $\left(\frac{6}{2} ، \frac{4}{2}\right)$ = (٣ ، ٢)

احداثي منتصف $\overline{\text{ب ء}}$ = احداثي منتصف $\overline{\text{ا جـ}}$ = م = (٣ ، ٢)

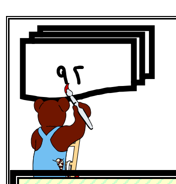
ميل $\overleftrightarrow{\text{ب ء}}$ = $\frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$ = $\frac{-1 - 5}{4 - 2}$ = $\frac{-6}{2}$ = – ٣ ∴ القطران متعامدان

ميل المستقيم العمودى على المستقيم المعلوم = ميل الخط المستقيم $\overleftrightarrow{\text{ا جـ}}$ = – مقلوب ميل $\overleftrightarrow{\text{ب ء}}$ = $\frac{1}{3}$

بالتعويض في الصورة العامة لمعادلة المستقيم بالميل و النقطة التي يمر بها المستقيم في المعادلة ص = م س + جـ

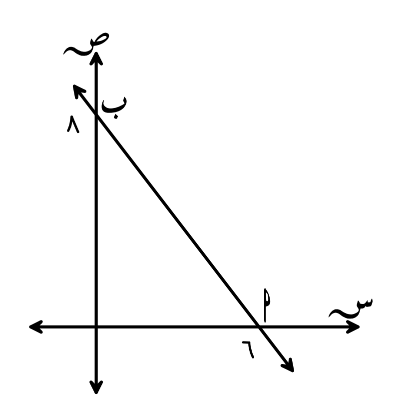
ص = ٣ س + جـ ⇐ $\frac{1}{3}$ (٣) + جـ = ٢ جـ = ٢ – ١ ⇐ جـ = ١

∴ المعادلة المطلوبة هي ⇐ ص = $\frac{1}{3}$ س + ١ ⇐ ٣ص = س + ٣ ⇐ ٣ص – س – ٣ = ٠



✍ **مثال [٢٣]**

أوجد معادلة المستقيم الذى يقطع من محورى الإحداثيات السينى والصادى جزءين موجبين طولهما ٦ ، ٨ وحدات طول على الترتيب ثم أوجد مساحة المثلث المحصور بين المستقيم و محورى الإحداثيات .



المستقيم يقطع من محور السينات الموجب جزء قدره ٦ وحدات

المستقيم يمر بالنقطة ا (٦ ، ٠)

المستقيم يقطع من محور الصادات الموجب جزء قدره ٨ وحدات

المستقيم يمر بالنقطة ب (٠ ، ٨)

المستقيم يمر بالنقطتين (٦ ، ٠) ، (٠ ، ٨)

ميل المستقيم $\overleftrightarrow{اب}$ = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$ = $\frac{٨ - ٠}{٠ - ٦}$ = $\frac{٨}{-٦}$ = $\frac{-٤}{٣}$

بالتعويض فى الصورة العامة لمعادلة المستقيم بالميل و النقطة التى يمر بها المستقيم فى المعادلة ص = م س + جـ

ص = $\frac{-٤}{٣}$ س + جـ ⟸ $\frac{-٤}{٣}$ (٠) + جـ = ٨ ⟸ جـ = ٨

∴ المعادلة المطلوبة هى ⟸ ص = $\frac{-٤}{٣}$ س + ٨ ⟸ ٣ص + ٤ س − ٢٤ = ٠

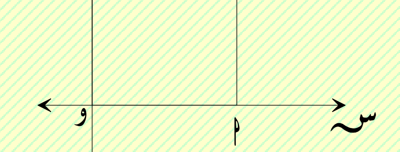
مساحة المثلث ا ب و = $\frac{١}{٢}$ × ا و × ب و = $\frac{١}{٢}$ × ٦ × ٨ = ٢٤ وحدة مربعة

✍ **مثال [٢٤]**

فى الشكل المقابل :

إذا كان : ا ب جـ و مستطيل

أوجد : طول $\overline{اجـ}$

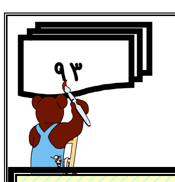


∵ ا ب جـ ء مستطيل

∵ ب(٩ ، ١٢) ∴ ا (٩ ، ٠) ∴ جـ (٠ ، ١٢)

∵ القطران متساويان ∴ ا جـ = ب و

∴ ا جـ = ب و = $\sqrt{(٩)^٢ + (١٢)^٢}$ = $\sqrt{٨١ + ١٤٤}$ = $\sqrt{٢٢٥}$ = ١٥ وحدة طول



✍ **مثال [٢٥]**

فى الشكل المقابل : $\overleftrightarrow{أب}$ يقطع محور الصادات فى النقطة أ (٠ ، ٨) ويقطع محور السينات فى النقطة ب

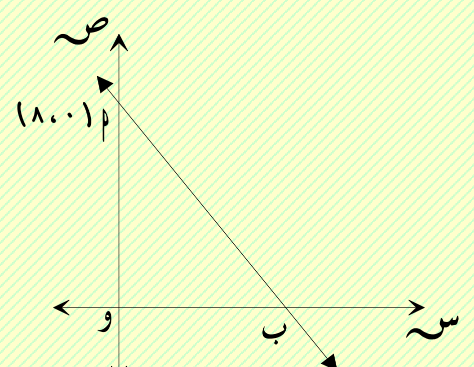
فإذا كان : ظا (∠ أ ب و) = $\frac{٤}{٣}$ أوجد :

① ق (∠ ب أ و)

② **احداثيا نقطة ب**

③ **ميل المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$**

④ **معادلة المستقيم المار بالنقطة و ، وعموديا على $\overleftrightarrow{أب}$**



∵ أ (٠ ، ٨)   ∴ و أ = ٨ وحدات

∵ ظا (∠ أ ب و) = $\frac{٤}{٣}$ = $\frac{أ و}{ب و}$

∴ $\frac{٤}{٣}$ = $\frac{٨}{و ب}$ ٤ و ب = ٢٤

∴ و ب = ٦ وحدات

① ∴ ظا (∠ ب أ و) = $\frac{٦}{٨}$ ∴ ظا$^{-١}$ ($\frac{٦}{٨}$) = ٣٦° ٥٢ً ١٢َ

ق (∠ ب أ و) = ٣٦° ٥٢ً ١٢َ

② **احداثيا نقطة ب**

∵ و ب = ٦ وحدات   ∵ ب ∈ محور س   ∴ ب (٦ ، ٠)

③ **ميل المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$**

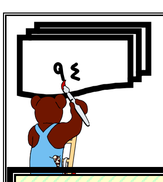
∵ أ (٠ ، ٨) ، ب (٦ ، ٠)

∴ ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$ = $\frac{٠ - ٨}{٦ - ٠}$ = $-\frac{٨}{٦}$ = $-\frac{٤}{٣}$

④ **معادلة المستقيم المار بالنقطة و ، وعموديا على $\overleftrightarrow{أب}$**

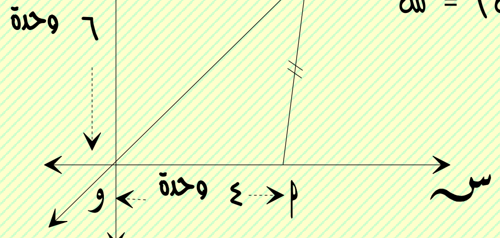
∵ المستقيم يمر بنقطة الأصل و (٠ ، ٠)   ∵ ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = $-\frac{٤}{٣}$ ∴ ميل العمودى على $\overleftrightarrow{أب}$ = $\frac{٣}{٤}$

∴ المعادلة المطلوب : ص = م س   ∴ ص = $\frac{٣}{٤}$ س



مثال [٢٦]

في الشكل المقابل :



ﻫ ∈ محور س ، ب ∈ محور ص بحيث : و ﻫ = ٤ وحدة طول

، و ب = ٦ وحدة طول ، والمستقيم و جـ يمثل الدالة د : د (س) = س

بحيث ﻫ جـ = ب جـ

أوجد احداثيي النقطة جـ

∵ ﻫ ∈ محور س ، و ﻫ = ٤ وحدة طول ∴ ﻫ (٤ ، ٠)

∵ ب ∈ محور ص ، و ب = ٦ وحدة طول ، ∴ ب (٠ ، ٦)

∵ والمستقيم و جـ يمثل الدالة د : د (س) = س

∴ احداثيا نقطة جـ (س ، س) ∵ ﻫ جـ = ب جـ

∴ $(س - ٤)^2 + (س - ٠)^2 = (س - ٠)^2 + (س - ٦)^2$

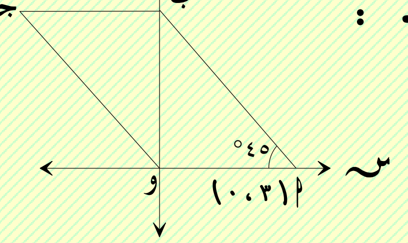
∴ $س^2 - ٨ س + ١٦ + س^2 = س^2 + س^2 - ١٢ س + ٣٦$

∴ ١٢ س − ٨ س = ٣٦ − ١٦ ∴ ٤ س = ٢٠ ∴ س = ٥ ∴ احداثيا نقطة جـ (٥ ، ٥)

مثال [٢٧]

في الشكل المقابل :





ﻫ ب جـ و متوازى أضلاع فيه : ق (∠ ﻫ) = ٤٥° ، ﻫ (٣ ، ٠) أوجد :

(١) احداثيا نقطة ب

(٢) معادلة و جـ

(٣) احداثيا نقطة منتصف ﻫ جـ

(١) لإيجاد احداثيا نقطة ب

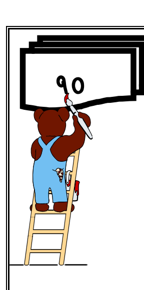
∵ ﻫ ب جـ و متوازى أضلاع ، ق (∠ ﻫ) = ٤٥°

، ﻫ (٣ ، ٠) ∈ س ، ب ∈ محور ص

∴ △ ﻫ و ب متساوى الساقين ∴ و ﻫ = و ب ∴ ب (٠ ، ٣)

(٢) لإيجاد معادلة و جـ

∵ ﻫ ب جـ و متوازى أضلاع ∴ ﻫ ب // و جـ ∴ ميل ﻫ ب = ميل و جـ



∵ ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٣ - ٠}{٣ - ٠} = - \frac{٣}{٣} = - ١$

∵ المستقيم $\overleftrightarrow{وجـ}$ يمر بنقطة الأصل

∴ معادلة $\overleftrightarrow{وجـ}$ هى ص = م س ∴ ص = − س

③ **لإيجاد احداثيا نقطة منتصف** $\overline{أجـ}$

∵ احداثيا منتصف $\overline{أجـ}$ = احداثيا منتصف $\overline{وب}$

∴ احداثيا منتصف $\overline{وب}$ = $(\frac{٠ + ٠}{٢} ، \frac{٣ + ٠}{٢}) = (٠ ، \frac{٣}{٢})$

∴ **احداثيا نقطة منتصف** $\overline{أجـ}$ = $(٠ ، \frac{٣}{٢})$

✍ **مثال [٢٨]**

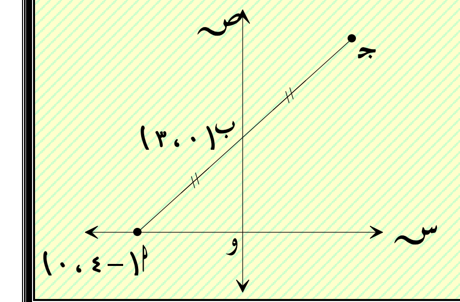
فى الشكل المقابل :

ب ∈ $\overline{أجـ}$ ، أ(−٤ ، ٠) ، ب(٠ ، ٣) ، أ ب = ب جـ **أوجد :**

① **احداثيا نقطة** جـ

② **فى المثلث** و أ ب ظا(∠ و أ ب)

③ **معادلة المستقيم** $\overleftrightarrow{أجـ}$



① **لإيجاد احداثيا نقطة** جـ

بفرض أن احداثيا جـ(س ، ص)

∵ أ ب = ب جـ ∴ ب منتصف $\overline{أجـ}$

∴ $(\frac{س - ٤}{٢} ، \frac{ص + ٠}{٢}) = (٠ ، ٣)$

∴ $\frac{س - ٤}{٢} = ٠$ $\frac{ص + ٠}{٢} = ٣$

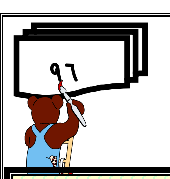
(٣،٠)

∴ س − ٤ = ٠ ص = ٦ ∴ س = ٤

∴ احداثيا نقطة جـ(٤ ، ٦)

② **لإيجاد** ظا(∠ و أ ب) **فى المثلث** و أ ب ∵ أ(−٤ ، ٠) ، ب(٠ ، ٣)

ظا(∠ و أ ب) = ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٣ - ٠}{٠ + ٤} = \frac{٣}{٤}$



✍ **مثال [٢٩]**

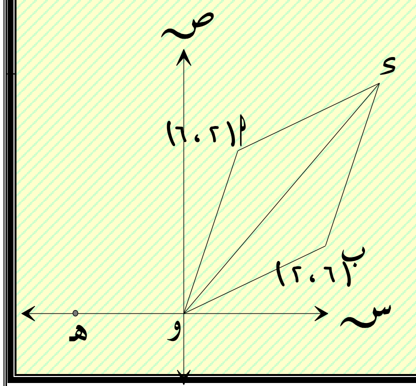
فى الشكل المقابل :

النقط م (٢ ، ٦) ، و (٠ ، ٠) ، ب (٦ ، ٢) ، ء هى رؤوس معين أوجد :

① **احداثيا النقطة ء**

② **معادلة المستقيم** $\overleftrightarrow{\text{و ء}}$

③ ق (∠ ء و هـ)



① لإيجاد **احداثيا النقطة ء**

∵ م ء ب و معين

∴ احداثيا نقطة منتصف $\overline{\text{و ء}}$ = احداثيا نقطة منتصف $\overline{\text{م ب}}$

∴ $\left(\frac{س}{٢} ، \frac{ص}{٢}\right) = \left(\frac{٦ + ٢}{٢} ، \frac{٢ + ٦}{٢}\right) = \left(\frac{٨}{٢} ، \frac{٨}{٢}\right)$

∴ س = ٨ ، ص = ص   ∴ **احداثيا النقطة** ء = (٨ ، ٨)

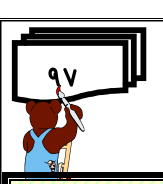
∵ المستقيم يمر بنقطة الأصل ∴ جـ = ٠

∵ ميل $\overleftrightarrow{\text{و ء}}$ = $\frac{٨ - ٠}{٨ - ٠} = \frac{٨}{٨} = ١$

∴ **معادلة المستقيم** $\overleftrightarrow{\text{و ء}}$ هى ص = س

∵ ميل $\overleftrightarrow{\text{و ء}}$ = $\frac{٨ - ٠}{٨ - ٠} = \frac{٨}{٨} = ١$ ∴ ظا (∠ ء و هـ) = − ١

∴ ق (∠ ء و هـ) = ١٣٥°



✍ **مثال [٣٠]**

فى الشكل المقابل :

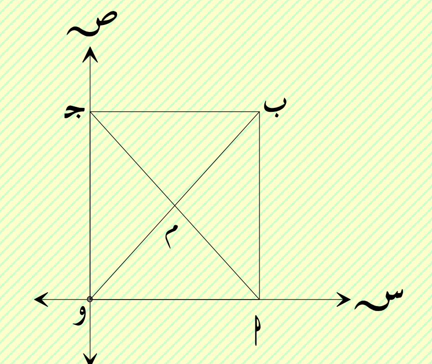
نظام احداثى متعامد ، و نقطة الأصل

، أ و جـ ب مربع ، م نقطة تقاطع قطريه حيث م(٢ ، ٢)

فأوجد كلا من :

① احداثيا كلا من النقطتين أ ، جـ

② معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$



∵ م(٢ ، ٢) ، و(٠ ، ٠) ∵ أ و جـ ب مربع

∴ م منتصف $\overline{\text{ب و}}$

∴ بفرض أن ب(س ، ص) ∴ $\left(\frac{س}{٢} ، \frac{ص}{٢}\right) = (٢ ، ٢)$

∴ س = ٤ ، ص = ٤

∴ ب(٤ ، ٤)

بفرض أن أ(س ، ٠) ، جـ(٠ ، ص) ∵ م منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$

∴ $\left(\frac{س + ٠}{٢} ، \frac{٠ + ص}{٢}\right) = (٢ ، ٢)$

∴ $\left(\frac{س}{٢} ، \frac{ص}{٢}\right) = (٢ ، ٢)$ ∴ س = ٤ ، ص = ٤

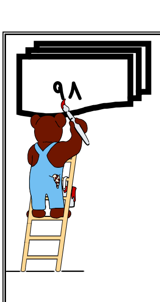
∴ أ(٤ ، ٠) ، جـ(٠ ، ٤)

② لإيجاد معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$

∵ ميل $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ = $\frac{٤ - ٠}{٠ - ٤} = \frac{٤}{-٤} = -١$ ∵ جـ = (٠ ، ٤)

∴ الجزء المقطوع من من محور ص = ٤ وحدة

∴ ص = − س + ٤



تمارين على معادلة الخط المستقيم

[1] أكمل ما يأتى

(1) معادلة محور السينات هى ....

(2) معادلة محور الصادات هى ....

(3) ميل المستقيم الموازى لمحور السينات هى ....

(4) ميل المستقيم الموازى لمحور الصادات هى ....

(5) المستقيم الذى معادلته س = ٤ يوازى محور .... وميله ....

(6) المستقيم الذى معادلته ص = ٩ يوازى محور .... وميله ....

(7) النقطتان (١ ، ٠) ، (٠ ، ١) تقعان على المستقيم الذى ميله ....

(8) ميل المستقيم المار بالنقطتين (٠ ، ٤) ، (–٥ ، –٧) هو ....

(9) ميل المستقيم المار بالنقطتين (٤ ، ٣) ، (٢ ، –١) هو ....

(10) معادلة المستقيم المار بنقطة الأصل وميله –١ هى ....

(11) شرط توازي المستقيمان اللذين ميلاهما م١ ، م٢ هو ....بينما شرط التعامد هو ....

(12) المستقيم ص = ٢ يوازي محور ....

(13) معادلة المستقيم المار بالنقطة (٧،٤) ويوازي محور الصادات هي ....

(14) ميل المستقيم ٣ س – ٤ ص – ١٥ = صفر هو ....

(15) إذا كانت ٢ = (٤ ، ٨) تنتمي للمستقيم س – ص – جـ = صفر فإن جـ = ...

(16) ميل المستقيم العمودي علي المستقيم ٣ س – ٤ ص – ١٥ = صفر يساوي ....

(17) معادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ، –٥) و ميله صفر هي ....

(18) معادلة المستقيم الذي يوازي محور السينات و يمر بالنقطة (٣ ، –٢) هي ....

(19) معادلة المستقيم الذي يوازي محور الصادات و يمر بالنقطة (–٣ ، ٢) هي ....

(20) إذا كان المستقيم ٢س –٣ ص + ٧ = صفر يوازي المستقيم ٢ س + ٣ ص + ٥ = صفر فإن ٢ =......

(21) إذا كان المستقيمان س – ٣ ص + ٩ = صفر ، ك س + ٢ ص = صفر متعامدان فإن ك = ...

(22) معادلة محور السينات هي ....بينما معادلة محور الصادات ....

(23) ميل المستقيم : ٣س –٤ص –١٥ = ٠ هو .... وميل العمودى عليه ....

(24) معادلة محور السينات هى .... بينما معادلة محور الصادات

(25) معادلة المستقيم الذى يمر بالنقطة (١ ، ٤) و يوازى محور السينات هى ....

(26) معادلة المستقيم المار (٣ ، –٦) ويوازى محور الصادات هى ....

(27) معادلة المستقيم المار بالنقطة (–٢ ، –١) وميله غير معرف هى ....

(٢٨) مربع أ ب جـ ء فيه ا (٠ ، ٣) ، ب (٤ ، ٠) فان مساحته .... وحدة مربعة

(٢٩) معادلة المستقيم الموازى للمستقيم ص = ٢س − ٧ ويمر بنقطة الأصل هى ....

(٣٠) إذا كانت النقطة (٢ ، ب) تنتمى للمستقيم س − ٣ص + ١ = ٠ فان ب = ...

(٣١) معادلة المستقيم المار بالنقطة (−٣ ، ٥) وعمودى على المستقيم الموازى لمحور السينات هى ....

(٣٢) المستقيم : س = ٤ يوازى محور ....

(٣٣) ميل المستقيم الذى معادلته : $\frac{1}{3}$ ص = ٢س − ٥ هو ....

(٣٤) معادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ، −٧) والعمودى على محور الصادات هى ....

(٣٥) ميل المستقيم الذى يصنع زاوية موجبة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات قياسها ٦٠° يساوى ....

(٣٦) معادلة المستقيم المار بالنقطة (١ ، −٣) وميله صفر هى ....

(٣٧) إذا كان النقطة : أ (٥ ، −٢) تنتمى للمستقيم س − ص = جـ فان جـ = ...

(٣٨) ميل المستقيم ٣ص = ٥س + ٤ يساوى ....

(٣٩) إذا كان المستقيمان : ٣س − ب ص = ٤ ، ٤س − ص = ٠ متعامدان فان ب = ...

(٤٠) المستقيم الذى معادلته : ٣س − ٢ص = ٦ ميله يساوى .... ويقطع من الجزء .... لمحور الصادات جزءا طوله .... وحدة طول

(٤١) ميل المستقيم الذى معادلته : $\frac{ص}{٣}$ = ٢س − ٥ هو ....

(٤٢) المعادلة س = ٦ تمثل معادلة مستقيم يوازي محور .... ويمر بالنقطة (........،........)

(٤٣) معادلة المستقيم الذي ميله ٦ ويمر بنقطة الأصل هي ....

(٤٤) ميل المستقيم الذى معادلته : $\frac{ص - ١}{٣}$ = $\frac{س}{٢}$ هو...........

(٤٥) معادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ، −٤) ويوازي محور السينات هي ....

(٤٦) إذا كان المستقيم أ س − ٢ص = ٩ عمودى على المستقيم ص = ٥س فان أ = ...

(٤٧) المستقيم الذى ميلة −٥ ويقطع محور الصادات فى النقطة (٠ ، ٢) تكون معادلته ....

(٤٨) المستقيم الذى معادلته : ٣س + ٢ص + ٨ = ٠ ميله يساوى .... ويقطع محور .... فى النقطة ....

(٤٩) إذا كان المستقيمان ٢س − ب ص = ٧ ، س = ٣ص − ٥ متوازيان فان ب = ...

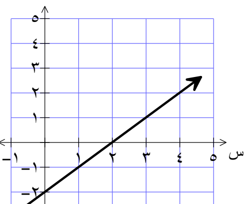
(٥٠) إذا كانت أ (٠ ، ٣) ، ب (٣ ، ٠) ، جـ (٠ ، ٥) فان معادلة المستقيم المار بنقطة أ وعمودى على $\overleftrightarrow{بجـ}$ هى.........

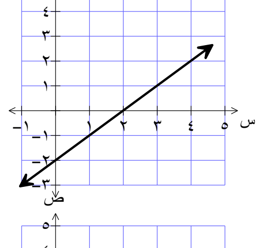
(٥١) إذا كان المستقيم ص + أ س + ٥ = ٠ يمر بالنقطة (٣ ، ٢) فان أ = ... ويكون ميلة ....

(٥٢) إذا كان المستقيم ل معادلته هى : ٧ص + ٢١ = ٣س فان :

(٥٣) ميل ل = ... ، الجزئين المقطوعين من المحورين السينى والصادى بالترتيب هما .... ، ....

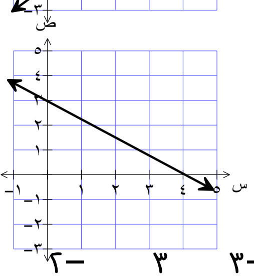
[٢] اختر الإجابة الصحيحة





(١) فى الشكل المقابل

ميل المستقيم = ... ($\frac{١}{٢}$ ، ١ ، −٢ ، −١)



(٢) فى الشكل المقابل

ميل المستقيم = ... ($\frac{٣}{٤}$ ، ٤ ، $\frac{-٣}{٤}$ ، ٣)

(٣) المستقيم الذى يحوى النقطتين (٢ ، ٣) ونقطة الأصل ميلة .... ($\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{-٣}{٢}$ ، $\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{-٣}{٣}$)

(٤) المستقيم الذى يمر بالنقطتين (−١ ، ٤) ، (٢ ، ٣) ميله .... ($\frac{١}{٣}$ ، $\frac{-١}{٣}$ ، −٣ ، ٣)

(٥) ميل المستقيم ٥س = ٣ −٢ص يساوى .... (٥ ، $\frac{١}{٥}$ ، $\frac{-٥}{٢}$ ، $\frac{-٢}{٥}$ ، $\frac{٢}{٥}$)

(٦) المستقيم $\overleftrightarrow{مو}$ حيث و نقطة الأصل ، م (−٣ ، ٢) فان ميلة.................. ($\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{-٣}{٢}$ ، $\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{-٢}{٣}$)

(٧) الجزء المقطوع من محور الصادات بالمستقيم ٢س − ٣ص = ٧ يساوى ....($\frac{٧}{٣}$ ، $\frac{٣}{٧}$ ، $\frac{١}{٣}$ ، $\frac{-٧}{٣}$)

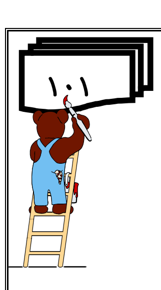
(٨) الجزء المقطوع من محور الصادات لمعادلة الخط المستقيم $\frac{س}{٣}$ − $\frac{ص}{٤}$ = ١ هى ....(٣ ، ٤ ، ١ ، ٧)

(٩) الجزء المقطوع من محور الصادات لمعادلة الخط المستقيم $\frac{س}{٦}$ + $\frac{ص}{٥}$ = ١ هى ...... (٦ ، ٥ ، ١١ ، ١)

(١٠) ميل المستقيم الذى معادلته ٣ص − م + ٢ = ٠ حيث م ثابت هو ....(غير معرف ، صفر ، $\frac{١}{٣}$ ، $\frac{م-٢}{٣}$)

(١١) إذا كان ميل المستقيم الذى يحتوى النقطتين (١ ، ٢) ، (س ، ٣) يساوى $\frac{١}{٢}$ فان س = ...(٣ ، ٢ ، ٤ ، ٥)

(١٢) إذا كان ميل المستقيم الذى يحتوى النقطتين (١ ، ٣) ، (٣ ، ص) يساوى ٢ فان ص = ...(٣ ، ٦ ، ٧ ، −٧)



[٣] اختر الإجابة الصحيحة :

(١) ميل المستقيم : ص = ٥ س + ٢ يساوي :

(أ) −٥ (ب) +٥ (ج) −٢ (د) +٢

(٢) معادلة المستقيم الذي ميله ٤ ويقطع محور الصادات في العدد −٢ هي :

(أ) ص = ٤ س + ٢ (ب) ص = −٤ س + ٢

(ج) ص = ٤ س − ٢ (د) ٤ ص = ٢ س

(٣) طول القطعة المستقيمة التي طرفاها (٣ , ٤) , (صفر , صفر) يساوي :

(أ) ٧ (ب) ١ (ج) ٢٥ (د) ٥

(٤) منتصف القطعة المستقيمة التي طرفاها (٢ , ٥) , (٤ , −١) هو :

(أ) (٦ , ٤) (ب) (٣ , ٢) (ج) (٣ , −٣) (د) (٠ , ٠)

(٥) معادلة المستقيم الذي ميله ٤ ويمر بنقطة الأصل هي

(أ) ص = ٤ (ب) ص = ٤س + ١ (ج) ص = ٤س

(٦) ميل المستقيم ٣ص = ٩س + ١ هو :

(أ) ٣ (ب) ٩ (ج) ٦ (د) −٣

(٧) معادلة المستقيم المار بالنقطة (١ ,−١) ويوازي محور السينات هي :

(أ) ص = −١ (ب) ص = ١ (ج) س = ١ (د) س = −١

(٨) المعادلة س = ٢ تمثل معادلة مستقيم يوازي محور

(أ) محور السينات (ب) محور الصادات (ج) نقطة الأصل (د) يقطع محورى الاحداثيات

(٩) معادلة المستقيم الموازي للمستقيم ص = ٢ س +٣ ويمر بالنقطة (٥ ، −٣) هو ....

(أ) ص = ٢س +١٣ (ب) ص = ٢س +١٣

(ج) ص = ٢س − ١٣ (د) ص = −٢س − ١٣

(١٠) ميل المستقيم ٢س − ٣ ص + ٥ = ٠ هــو ....

(أ) $\frac{٢}{٣}$ (ب) $\frac{-٢}{٣}$ (ج) $\frac{٣}{٢}$ (ء) $\frac{-٣}{٢}$

(١١) ميل المستقيم المار بالنقطتين (١ ، ٣) ، (٣ ، ٥) يساوي ....

(أ) −١ (ب) −٣ (ج) ١ (د) ٢

(١٢) المستقيمان ٢ س − ٥ص = ١ ، ٥س + ٢ص = ٦ يكونا ....

(أ) متوازيان (ب) متقاطعان (ج) متطابقان (د) متعامدان

(١٣) ميل المستقيم ٣س + ٥ص − ١١ = ٠ : ....

(أ) −٥/٣ (ب) −٣/٥ (ج) ٣/٥ (د) ١١/٥

(١٤) ميل المستقيم ٣ س − ٤ ص − ٧ = ٠ : ....

(أ) ١/٤ (ب) ٤ (ج) ٣/٤ (د) −٣/٤

(١٥) ميل المستقيم الذى معادلته : ٢ص = ٨س − ٢ هو ....

(أ) ١/٢ (ب) ٨ (ج) ٤ (د) ١/٤

(١٦) معادلة المستقيم الذى ميله = ١/٢ ويمر بالنقطة (٠ ، −٣) هى

(أ) ص = ١/٢ س + ٣
(ب) ص = −٣س + ١/٢
(ج) س = ١/٢ ص −٣
(د) ص = ١/٢ س −٣

(١٧) معادلة المستقيم الذى يقطع جزءا طوله ٤ وحدات من الاتجاه الموجب لمحور الصادات ويوازى المستقيم : ٣س + ٥ هى ....

(أ) ص = ٣س + ٤
(ب) ص = ٤س + ٣
(ج) ص = ٣س − ٤
(د) ص = ٤ − ٣س

(١٨) المستقيم الذى معادلته : ٢س − ٣ص − ٦ = ٠ يقطع من محور الصادات جزءا طوله .... وحدة طول

(أ) −٦ (ب) −٢ (ج) ٢/٣ (د) ٢

(١٩) المستقيمان اللذان معادلتيهما ص = ٣س − ٥ ، ٢ص − ٦س = ٥ مستقيمان ....

(أ) متوازيان (ب) منطبقان (ج) متقاطعان وغير متعامدان (د) متعامدان

(٢٠) المستقيمان س + ص = ٥ ، ك س + ٢ ص = ٠ متوازيان فان ك تساوى ....

(أ) −٢ (ب) −١ (ج) ١ (د) ٢

(٢١) حاصل ضرب ميلى قطرى المعين = ...

(أ) ١ (ب) −١ (ج) ٠ (د) غير ذلك

(٢٢) المربع أ ب جـ ء فيه أ (٠ ، ٤) ، جـ (٥ ، −١) تكون مساحته .... وحدة مربعة

(أ) ٥ (ب) ١٦ (ج) ٢٥ (د) ٥√٢

(٢٣) المستقيمان : ص = أ س + ب ، ص = جـ س + ء متعامدان فان .... × .... = −١

(أ) أ × د (ب) ب × جـ (جـ) أ × جـ (د) ب × د

(٢٤) المستقيم المار بالنقطتين (٥ ، ٤) ، (١ ، ٥) عمودى على المستقيم ....

(أ) ٤س = ٣ − ٤ص (ب) ٥ص + س = ٤

(جـ) ص = ٤س س + ٢ص = ٤

(٢٥) إذا كان المستقيم الذى معادلته: ص = (أ − ١) س + ٥ يوازى المستقيم المار بالنقطتين (١ ، ٢) ، (٣ ، ٨) فان قيمة: أ = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) −٤ (د) ٧

(٢٦) ميل المستقيم الذى معادلته : ٣ص = أ س − ٥ ويمر بالنقطة (٢ ، ٥) هو ....

(أ) −١ (ب) ١ (جـ) −٢ (د) $\frac{١}{٣}$

(٢٧) حاصل ضرب ميلة قطري المربع = ...

(أ) ١ (ب) −١ (جـ) ٠ (د) غير ذلك

(٢٨) مساحة △ بالوحدات المربعة المحدد بالمستقيمات ٣س − ٤ص = ١٢ ، س = ٠ ، ص = ٠ يساوى.........

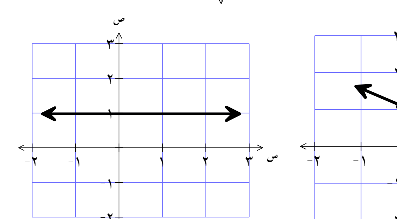
(أ) ٦ (ب) ٦ (جـ) ١٢ (د) −٦

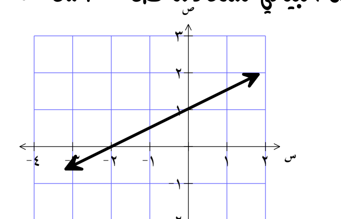
(٢٩) فى الشكل المقابل : يمثل معادلة المستقيم ....

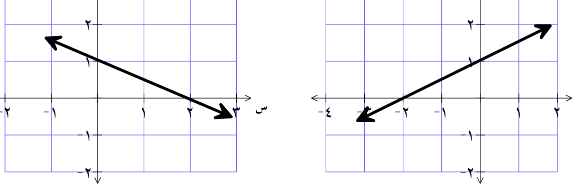
ص = ٢س − ٢ ص = ٢ − ٢س

ص = ٢س + ٢ ص = −٢س − ٢

(٣٠) أحد الأشكال التالية هو التمثيل البياني للمعادلة ص = ٢س + ١







[٤] أوجد معادلة المستقيم الذى ميله − ٥ ويقطع من محور الصادات الموجب جزءا قدرة وحدتين

[٥] أوجد معادلة المستقيم الذى ميله $\frac{-١}{٣}$ ويقطع من محور السينات الموجب جزءا قدرة ٣وحدات

[٦] أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٣ ، −٢) وميله ٤ وحدد نقط تقاطعه مع محوري الإحداثيات

[٧] أوجد معادلة المستقيم الذى ميله $\frac{١}{٣}$ ويقطع من الجزء السالب لمحور الصادات جزءا طوله ٣ وحدات ، وأوجد نقطة تقاطعه مع محور الصادات و نقطة تقاطعه مع محور السينات

[٨] أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٣ ، ١ —) و ميله = $\frac{١}{٤}$ وأوجد نقطة تقاطعه مع محور الصادات و نقطة تقاطعه مع محور السينات

[٩] أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين التاليتين (٤ ، ٣) ، (٣ ، ٢)

[١٠] أوجد معادلة المستقيم الذي ميلة ٥ ويقطع محور ص في النقطة (٠ ، —٣) .

[١١] أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (— ٢ ، ٠) و ميله = ٢

[١٢] أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٠ ، ٠) و ميله = — ١

[١٣] أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (—٦ ، ١) ويوازى محور الصادات

[١٤] أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٧ ، ٢) ويوازى محور السينات

[١٥] أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (—١ ، ٢) و العمودى على المستقيم الذى ميله — ١ .

[١٦] أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة الأصل و العمودى على المستقيم الذى ميله ٥ .

[١٧] أوجد معادلة المستقيم الذى يقطع من محور الصادات جزءا موجبا طوله ٢ وحدة طول ويكون عموديا على المستقيم الذى ميله —٢

[١٨] أوجد معادلة المستقيم الذى يقطع من محور الصادات جزءا سالبا طوله ٥ وحدة طول ويكون عموديا على المستقيم الذى معادلته : س — ٥ص —٣ =٠

[١٩] أوجد معادلة المستقيم الذى يقطع من محور الصادات جزءا سالبا طوله ٣ وحدة طول ويكون عموديا على المستقيم الذى معادلته : س= ٦ص — ١

[٢٠] أوجد معادلة المستقيم الذى يقطع من محور السينات جزءا سالبا طوله ٤ وحدة طول ويكون عموديا على المستقيم الذى معادلته : س= ص — ٩

[٢١] أوجد معادلة المستقيم الذى يقطع من محور السينات جزءا موجبا طوله ٢ وحدة طول ويكون عموديا على المستقيم الذى معادلته : ٣س — ٨ = ٣ص

[٢٢] أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (–٤ ، ٣) ، يوازى المستقيم الذى ميلة –١

[٢٣] أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٥ ، –١) ، يوازى المستقيم الذى معادلته س + ٢ص –٥ = ٠

[٢٤] أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ، –٣) ، يوازى المستقيم الذى معادلته $\frac{س}{٢} - \frac{٢ص}{٣} = ١$

[٢٥] أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (–١ ، –٤) ، يوازى المستقيم الذى معادلته ٣س + ٥ص = –١

[٢٦] أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ، ٣) ، يوازى المستقيم الذى ميلة –١

[٢٧] أوجد معادلة المستقيم الذى يقطع من محور الصادات جزءا موجبا مقدارة ٥ وحدات وعمودى على المستقيم المار بالنقطتين التاليتين (–٢ ، ١) ، (٢ ، ٧)

[٢٨] أوجد طولي الجزءين المقطوعين من المحورين بواسطة المستقيم ٢ س – ٣ ص + ١٢ = صفر

[٢٩] أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (١ ، – ٣) و الموازي للمستقيم ٣ س + ٥ ص – ١١ = صفر

[٣٠] أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٤ ، – ١) و عمودي على المستقيم الذي ميله = –٣

[٣١] أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (١ ، –٢) ويوازي المستقيم ل الذي معادلته : س + ٤ ص = ٥

[٣٢] أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٣ ، ١) وعموديا علي المستقيم ٢س +٣ ص = ٥

[٣٣] أوجد معادلة المستقيم الموازي للمستقيم س – ص – ١ = ٠ ويمر بالنقطة (٣ ، – ١)

[٣٤] أوجد معادلة المستقيم ل الذى يمر بالنقطة (– ٢ ، ٥) وميله –٢

[٣٥] أوجد معادلة المستقيم ل الذى يوازي المستقيم ٢س – ٣ ص = ٦ و يمر بالنقطة (٧ ، ١)

[٣٦] أوجد معادلة المستقيم الذى يقطع من محورى الإحداثيات السينى والصادى جزئين موجبين طوليهما ٣ ، ٤ على الترتيب ثم أوجد مساحة المثلث المحصور بين المستقيم ومحورى الإحداثيات .

[٤٣] إذا كان ميل المستقيم (٣ م + ١) س – ٢ م ص + ٣ = صفر يساوي ٢ فأوجد قيمة م

[٤٤] إذا كان المستقيمان ٣ س – ٥ ص + ١ = صفر ، م س + ٣ ص = س + ٢ متعامدان فأوجد قيمة م

[٤٥] أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ، – ٣) و ميله = ٢ وإذا كان هذا المستقيم يمر بالنقطتين (م ، ٧) ، (٥ ، ب) فأوجد قيمتي م ، ب

[٤٦] م ب جـ ء مربع فيه : ب(٢ ، هـ) ، ء(١ ، ٤) فاذا كانت معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{م جـ}$ هى ٢س + ٤ص

[٤٧] أوجد معادلة المستقيم المار بمنتصف القطعة المستقيمة $\overline{م ب}$ حيث م(–١ ، ٦) ، ب(–٣ ، –٢)

وعمودى على المستقيم الذى معادلته ٦ص +٣س – ١

[٤٨] م(٥ ، –٦) ، ب(٣ ، ٧) ، جـ(١ . –٣) ، فاوجد معادلة المستقيم الذى يمر بالنقطة م وبمنتصف $\overline{ب جـ}$

[٤٩] أوجد قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المستقيم ٣س – ٢ص = –٦ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات
ثم أوجد احداثى نقطة تقاطعه مع محور الصادات .

[٥٠] △ م ب جـ فيه م(٠ ، ٦) ، ب(٥ ، –١) ، جـ(–٢ ، ١) أوجد معادلة المستقيم المار
بالرأس م وعمودى على المستقيم $\overleftrightarrow{ب جـ}$

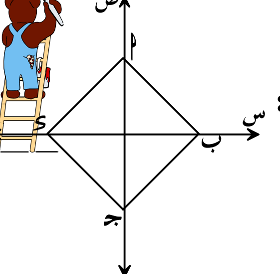
[٥١] أوجد معادلة المستقيم الذى يقطع من محوى الإحداثيات السينى والصادى جزئين موجبين طوليهما ٣ ، ٢ وحدة طول على الترتيب

[٥٢] △ م ب جـ فيه م(١ ، ٢) ، ب(٥ ، –٢) ، جـ(٣ ، ٤) ، ء منتصف $\overline{م ب}$ ، رسم $\overleftarrow{ء هـ}$ // $\overleftrightarrow{ب جـ}$
يقطع $\overline{م جـ}$ فى هـ . أوجد معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{ء هـ}$

[٥٣] م ب جـ ء مربع فيه م = (٣ ، ٢) ، جـ(–١ ، ٤) أوجد معادلتي قطريه

[٥٤] م ب جـ ء معين ، م نقطة تقاطع قطريه حيث : م(١ ، ٣) ، جـ(٦ ، ٠) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين ب ، ء

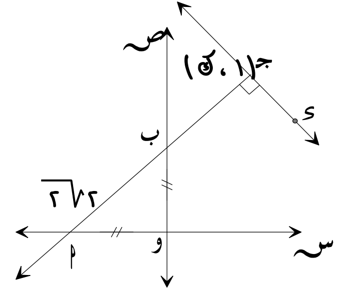
[٥٥] م ب جـ ء متوازي أضلاع فيه م(١ ، ٢) ، ب(–٣ ، ٤) ، جـ = (٠ ، ٠) .أوجد معادلة المستقيم $ل_2$
المار بنقطة م ، عمودى على $\overline{ء جـ}$ ومن ذلك استنتج أن $ل_2$ = م جـ



[٥٦] فى الشكل المقابل

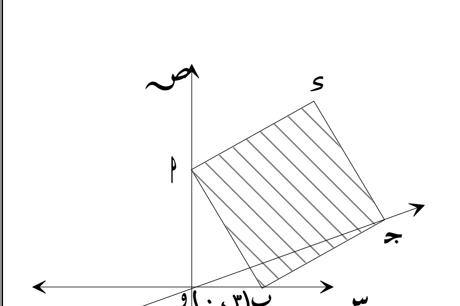
أ ب جـ ء مربع مساحة ٣٢ وحدة مربعة و **مركزة نقطة الأصل و لنظام احداثى متعامد :**

أوجد معادلة كلا من : $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{بجـ}$ ، $\overleftrightarrow{جـء}$ ، $\overleftrightarrow{أء}$



[٥٧] فى الشكل المقابل :

أوجد معادلة $\overleftrightarrow{جـء}$

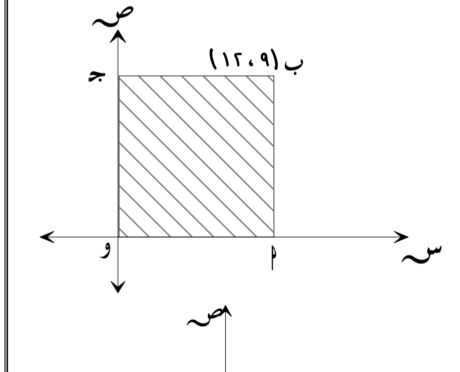


[٥٨] فى الشكل المقابل :

إذا كانت مساحة المربع أ ب جـ ء = ٢٥ **وحدة مربعة**

أوجد معادلة $\overleftrightarrow{جـو}$

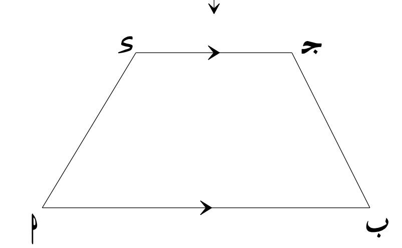




[٥٩] فى الشكل المقابل

إذا كان : أ ب جـ و **مستطيل**

فأوجد : طول $\overline{أجـ}$



[٦٠] فى الشكل المقابل

إذا كانت أ ∈ **محور السينات ، وكان** أ و = أ ب

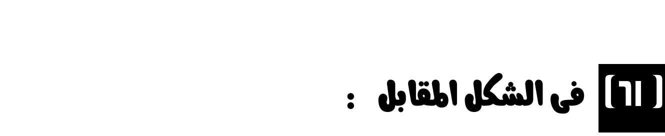
أوجد طول $\overline{أب}$



[٦١] فى الشكل المقابل :

أ ب جـ ء **شبه منحرف فيه :** $\overline{أب}$ // $\overline{جـء}$

، أ(٩ ، −٢) ، ب(٣ ، ٢) ، جـ(س ، −س) ، ء(١ ، ٢)



أوجد احداثيي نقطة جـ

[٦٢] أوجد ميل المستقيم الذى يصنع زاوية موجبة جيب تمامها $\frac{٥}{١٣}$ **مع الاتجاه الموجب لمحور السينات**

[٦٣] إذا كانت النقط : أ(١ ، ١) ، ب(٣ ، ٣) ، جـ(٠ ، −٣س) ، ء(س ، ص)

هى رؤوس المستطيل أ ب جـ ء **فأوجد قيمة كل من** س ، ص

[٦٤] أ ب جـ ء معين فيه : أ(٣ ، ٢) ، ب(٤ ، ك) ، جـ(−١ ، −٢)

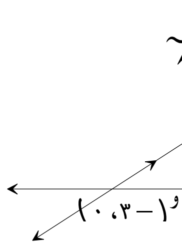
أوجد : ❶ قيمة ك ❷ طول $\overline{\text{ب ء}}$

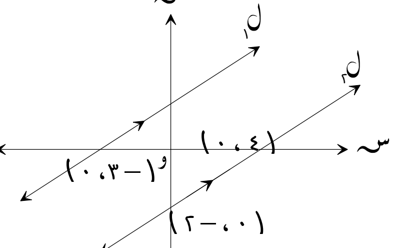
[٦٥] في الشكل المقابل :

إذا كان : المستقيم ل١ ⊥ المستقيم ل٢

، أ ∈ المستقيم ل٢ بحيث أ(٥م ، م)

أوجد قيمة م

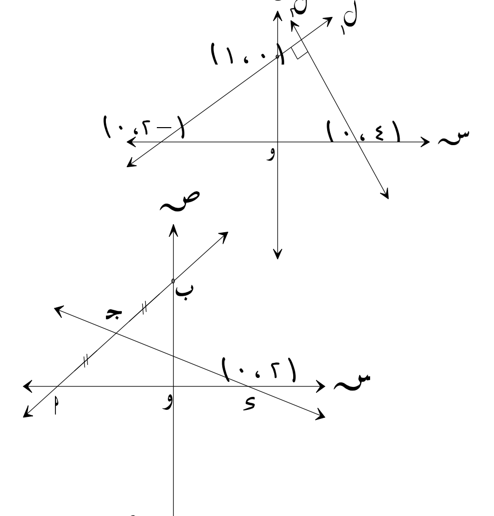




[٦٦] في الشكل المقابل :

إذا كان : ل١ ∥ ل٢

أوجد معادلة المستقيم ل١



[٦٧] في الشكل المقابل :

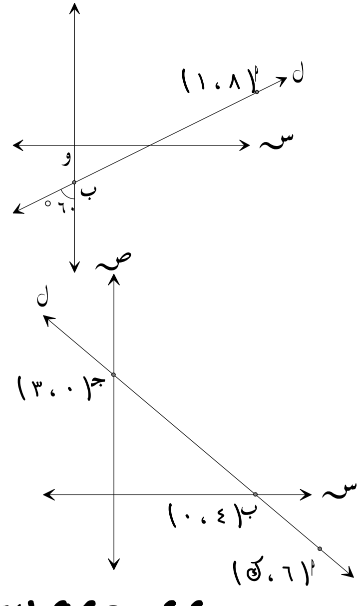
إذا كان : ل١ ⊥ ل٢ أوجد معادلة المستقيم ل٢

[٦٨] في الشكل المقابل :

إذا كانت معادلة $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ هي ٢س − ٣ص + ١٢ = ٠

وكانت جـ منتصف $\overline{\text{أ ب}}$

أوجد معادلة $\overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$



[٦٩] في الشكل المقابل :

ق(∠ب) = ٦٠° ، أ(٨ ، ١) ∈ ل

أوجد معادلة المستقيم

[٧٠] في الشكل المقابل :

إذا كان أ ∈ ل



، أ(٦ ، ك) ، ب(٤ ، ٠) ، جـ(٠ ، ٣)

أوجد قيمة ك